

Prouver par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que pour tout n – *upplet* de réels $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, tout n – *upplet* de réels distincts $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ et tout intervalle J de réels non réduit à un point, on a :

$$\left(\forall x \in J : \sum_{k=1}^n a_k e^{\lambda_k x} = 0 \right) \Rightarrow \forall k \in \{1, \dots, n\} \ a_k = 0$$

Réponse :

Initialisation : Pour $n = 1$

On suppose :

$$\forall x \in J : a_1 e^{\lambda_1 x} = 0$$

Alors :

$$a_1 = 0$$

Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un entier $n \geq 1$.

Soit alors $(a_1, a_2, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}, (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1})$ un $n + 1$ – *upplet* de réels distinct et J un intervalle de réels non réduit à un point tels que :

$$\forall x \in J : \sum_{k=1}^{n+1} a_k e^{\lambda_k x} = 0$$

Alors en dérivant :

$$\forall x \in J : \sum_{k=1}^{n+1} a_k \lambda_k e^{\lambda_k x} = 0$$

Et en retranchant la première relation multipliée par λ_{n+1} :

$$\forall x \in J : \sum_{k=1}^n a_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) e^{\lambda_k x} = 0$$

Ainsi, en appliquant l'hypothèse de récurrence :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : a_k (\lambda_k - \lambda_{n+1}) = 0$$

D'où :

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket : a_k = 0$$

Puis en remontant à l'équation initiale :

$$a_{n+1} = 0$$

Ce qui prouve l'hérédité.

