

Mouvement d'une particule chargée dans un champ uniforme

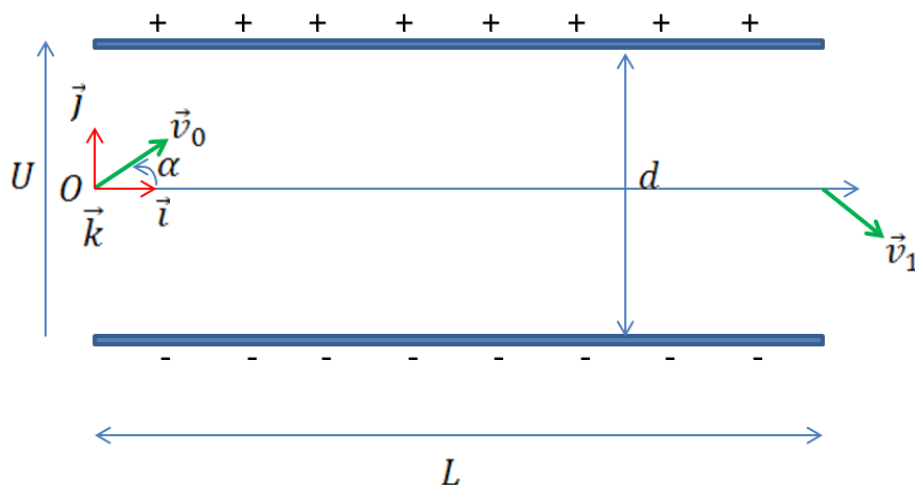
Une particule chargée (proton) arrive entre les deux plaques d'un condensateur plan où règne un champ électrostatique uniforme créé par une tension U appliquée entre ses armatures séparées par du vide d'une distance d . On définit un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel qu'indiqué sur la figure. Le proton arrive avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0$ situé dans le plan $(\vec{i}, \vec{j})$ et faisant un angle α avec le vecteur $\vec{i}$. Il ressort du condensateur avec un vecteur vitesse $\vec{v}_1$ situé dans le plan $(\vec{i}, \vec{j})$ et faisant un angle $(-\alpha)$ avec le vecteur $\vec{i}$. On donne :

$$d = 4 \text{ cm}, L = 10 \text{ cm}, \|\vec{v}_0\| = 1\,000 \text{ m s}^{-1}, \alpha = 30^\circ$$

$$\text{masse du proton : } m = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\text{charge du proton : } e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{accélération de la pesanteur : } g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$$



- 1) Rappeler la relation existant entre la norme du champ électrostatique $\vec{E}$, constant dans la zone située entre les armatures et à distance des bords, la tension U et la distance entre armatures d .
- 2) Faire le bilan des forces agissant sur le proton pendant son parcours entre les armatures.
- 3) Calculer numériquement l'intensité de chaque force (on prendra $U = 1 \text{ V}$ pour cette question) et en déduire que l'une d'elle est négligeable devant l'autre.
- 4) En appliquant la loi de Newton, établir les équations du mouvement.
- 5) Résoudre le système d'équations différentielles et en déduire le système des équations horaires du mouvement.

- 6) Eliminer le paramètre temps dans les équations horaires et en déduire une équation cartésienne du support de trajectoire de la forme $y = -a x^2 + b x$. On explicitera a et b en fonction des paramètres.
- 7) En déduire les coordonnées (x_S, y_S) du sommet de la trajectoire d'abord en fonction de a et b puis des paramètres.
- 8) En déduire l'expression de la tension U en fonction des paramètres, puis faire l'application numérique. Vérifier que le sommet se situe bien entre les deux armatures et donc que le proton ressort.
- 9) On suppose maintenant que le proton entre dans le condensateur sous un angle α nul et on suppose que l'on a disposé des bobines d'Helmoltz de telle sorte à créer un champ magnétique constant entre les armatures du condensateur de la forme $\vec{B} = -B \vec{k}$.

Faire un dessin des forces électrostatique et magnétique.

Déterminer la valeur de B pour que le proton ne dévie pas de sa trajectoire initiale, autrement dit que la force magnétique compense la force électrostatique.

1)

$$U = \|\vec{E}\| \times d$$

2)

Force électrostatique :

$$\vec{F}_e = e \vec{E} = -e E \vec{j} = -\frac{e U}{d} \vec{j}$$

Force gravitationnelle :

$$\vec{F}_g = m \vec{g} = -m g \vec{j}$$

3)

$$\|\vec{F}_e\| = \frac{e U}{d} = \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 1}{4 \times 10^{-2}} = 4 \times 10^{-18} \text{ N}$$

$$\|\vec{F}_g\| = m g = 1,67 \times 10^{-27} \times 9,8 \approx 1,6 \times 10^{-26} \text{ N}$$

La force gravitationnelle est donc négligeable devant la force électrostatique.

4)

$$\vec{F}_e = m \vec{a}$$

Donc :

$$\vec{a} = -\frac{e U}{m d} \vec{j}$$

Soit, en projection dans la base du repère :

$$\begin{cases} a_x = 0 \\ a_y = -\frac{e U}{m d} \\ a_z = 0 \end{cases}$$

5) En intégrant, compte tenu des conditions initiales de vitesse :

$$\begin{cases} v_x = v_0 \cos(\alpha) \\ v_y = -\frac{e U}{m d} t + v_0 \sin(\alpha) \\ v_z = 0 \end{cases}$$

En intégrant à nouveau, compte tenu des conditions initiales de position :

$$\begin{cases} x = v_0 \cos(\alpha) t \\ y = -\frac{e U}{2 m d} t^2 + v_0 \sin(\alpha) t \\ z = 0 \end{cases}$$

6)

De la première équation on tire :

$$t = \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

et on reporte dans la seconde :

$$y = -\frac{e U}{2 m d} \left(\frac{x}{v_0 \cos(\alpha)} \right)^2 + v_0 \sin(\alpha) \frac{x}{v_0 \cos(\alpha)}$$

$$y = -\frac{e U}{2 m d v_0^2 \cos^2(\alpha)} x^2 + \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} x$$

L'équation est de la forme :

$$y = -a x^2 + b x$$

7)

Le sommet correspond à l'abscisse où la dérivée est nulle :

$$\frac{dy}{dx} = -2 a x + b$$

Donc :

$$x_S = \frac{b}{2 a} = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \times \frac{m d v_0^2 \cos^2(\alpha)}{e U}$$

$$x_S = \frac{m d v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{e U}$$

$$y_S = -a \left(\frac{b}{2 a} \right)^2 + b \left(\frac{b}{2 a} \right) = -\frac{b^2}{4 a} + \frac{b^2}{2 a} = \frac{b^2}{4 a}$$

$$y_S = \left(\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \right)^2 \times \frac{m d v_0^2 \cos^2(\alpha)}{2 e U} =$$

$$y_S = \frac{m d v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2 e U}$$

8)

La condition pour que le proton ressorte en $y = 0$ est :

$$2 x_S = L$$

Soit :

$$\frac{2 m d v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{e U} = L$$

Donc :

$$U = \frac{2 m d v_0^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}{e L} = \frac{m d v_0^2 \sin(2 \alpha)}{e L}$$

Soit numériquement :

$$U = \frac{1,67 \times 10^{-27} \times 4 \times 10^{-2} \times 10^6 \times \sin(60^\circ)}{1,6 \times 10^{-19} \times 10 \times 10^{-2}} \approx 3,6 \times 10^{-3} V = 3,6 mV$$

On note que :

$$\frac{m d v_0^2}{e U} = \frac{L}{2 \sin(\alpha) \cos(\alpha)}$$

Donc :

$$y_s = \frac{m d v_0^2 \sin^2(\alpha)}{2 e U} = \frac{L \sin^2(\alpha)}{4 \sin(\alpha) \cos(\alpha)} = \frac{L}{4} \tan(\alpha)$$

Donc :

$$y_s = \frac{10}{4} \times \frac{1}{\sqrt{3}} \approx 1,4 cm$$

Le proton ressort bien !

9)

Le proton subit une force électrique :

$$\vec{F}_e = -\frac{e U}{d} \vec{j}$$

et une force magnétique :

$$\vec{F}_m = e \vec{v} \wedge \vec{B} = (e v_0 \vec{i}) \wedge (-B \vec{k}) = e v_0 B \vec{j}$$

La condition de compensation est :

$$\vec{F}_e + \vec{F}_m = \vec{0}$$

Soit :

$$e v_0 B = \frac{e U}{d}$$

D'où :

$$B = \frac{v_0 U}{d}$$

Application numérique :

$$B = \frac{10^3 \times 3,6 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-2}} = 90 \text{ T}$$