Enoncé :

Soit U une suite arithmétique ne s'annulant pas, montrer que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k\, U_{k+1}} = \frac{n+1}{U_0\, U_{n+1}}$$

Solution :

Soit a la raison et b le premier terme alors :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k\, U_{k+1}} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(a\,k+b)\,(a\,(k+1)+b)}$$

Effectuons une décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{(a\,k+b)\,(a\,(k+1)+b)} = \frac{c}{a\,k+b} + \frac{d}{a\,(k+1)+b}$$

$$= \frac{c\,(a\,(k+1)+b) + d\,(a\,k+b)}{(a\,k+b)\,(a\,(k+1)+b)}$$

$$= \frac{(c+d)a + c\,(a+b) + d\,b}{(a\,k+b)\,(a\,(k+1)+b)}$$

Par identification il vient :

$$\begin{cases} (c+d)a = 0 \\ c\,(a+b) + d\,b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = -c \\ c\,a + c\,b - c\,b = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} d = -\dfrac{1}{a} \\ c = \dfrac{1}{a} \end{cases}$$

D'où :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{U_k\, U_{k+1}} = \frac{1}{a} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{a\,k+b} - \frac{d}{a\,(k+1)+b} \right)$$

Nous sommes en présence d'une somme télescopique qui vaut :

$$\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a\,(n+1)+b}\right)=\frac{1}{a}\left(\frac{a\,(n+1)+b-b}{b\,(a\,(n+1)+b)}\right)=\frac{n+1}{U_0\,U_{n+1}}$$