Enoncé :

1) **Soit $L \in [-1,1]$. Déterminer une suite (U_n) tendant vers $+\infty$ telle que la suite $\left(sin\ (U_n)\right)$ admette pour limite L**
2) **La suite $(sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admet elle une limite en $+\infty$**
3) **Etudier selon les valeurs du nombre réel a la convergence de la suite $(sin(n\ a))_{n\in\mathbb{N}}$**

Solution :

1) Il suffit de considérer :

$$U_n = sin^{-1}(L) + 2\ n\ \pi$$

On a alors :

$$sin(U_n) = L$$

2) Supposons par l'absurde que $(sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ admette une limite L. Rappelons alors les formules :

$$sin(a) + sin(b) = 2\ sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\ cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

$$sin(a) - sin(b) = 2\ cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\ sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$sin(n+2) + sin(n) = 2\ sin(n+1)\ cos(1)$$

$$sin(n+2) - sin(n) = 2\ cos(n+1)\ sin(1)$$

Par passage à la limite dans la première, on en déduit :

$$2\ L = 2\ L\ cos(1)$$

Donc, sachant $cos(1) \neq 1$:

$$L = 0$$

Puis dans la seconde, sachant $sin(1) \neq 0$:

$$0 = \lim_{n\to+\infty} cos(n+1)$$

Or :

$$cos^2(n+1) + sin^2(n+1) = 1$$

Et par passage à la limite :

$$0 + 0 = 1$$

Ce qui est absurde

Donc la suite $(sin(n))_{n\in\mathbb{N}}$ n'a pas de limite

Remarque : Si la périodicité de la fonction $sin(x)$ sur $\mathbb{R}$ permet de conclure qu'elle n'a pas de limite (car seules les fonctions périodiques constantes ont une limite, un tel argument ne peut être utilisé pour prouver que la suite $sin(n)$ n'a pas de limite. L'exemple du 1) le prouve

3) Si $a = 0$ la suite est nulle. Plaçons nous dans le cas $a \neq 0$ et supposons que la suite converge vers une limite L. Alors par un traitement analogue au précédent, nous avons :

$$sin\big((n+2)\,a\big) + sin(n\,a) = 2\,sin\big((n+1)\,a\big)\ cos(a)$$
$$sin\big((n+2)\,a\big) - sin(n\,a) = 2\,cos\big((n+1)\,a\big)\,sin(a)$$

$$cos^2\big((n+1)\,a\big) + sin^2\big((n+1)\,a\big) = 1$$

L vérifie donc par passage à la limite dans la première :

$$2\,L = 2\,L\,cos(a)$$

Il y a donc deux cas :

1er cas : $a \neq p\,\pi, p \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas : $cos(a) \neq 1, sin(a) \neq 0$ et donc $L = 0$

La seconde relation montre que $cos\big((n+1)\,a\big)$ converge vers 0 et la troisième aboutit par passage à la limite à une absurdité.

2ème cas : $a = p\,\pi, p \in \mathbb{Z}$

Dans ce cas :

$$sin(n\,a) = sin(n\,p\,\pi) = 0$$

Et la suite est identiquement nulle

Conclusion : La suite converge si et seulement si $a = p\,\pi,\ p \in \mathbb{Z}$ auquel cas elle est identiquement nulle.