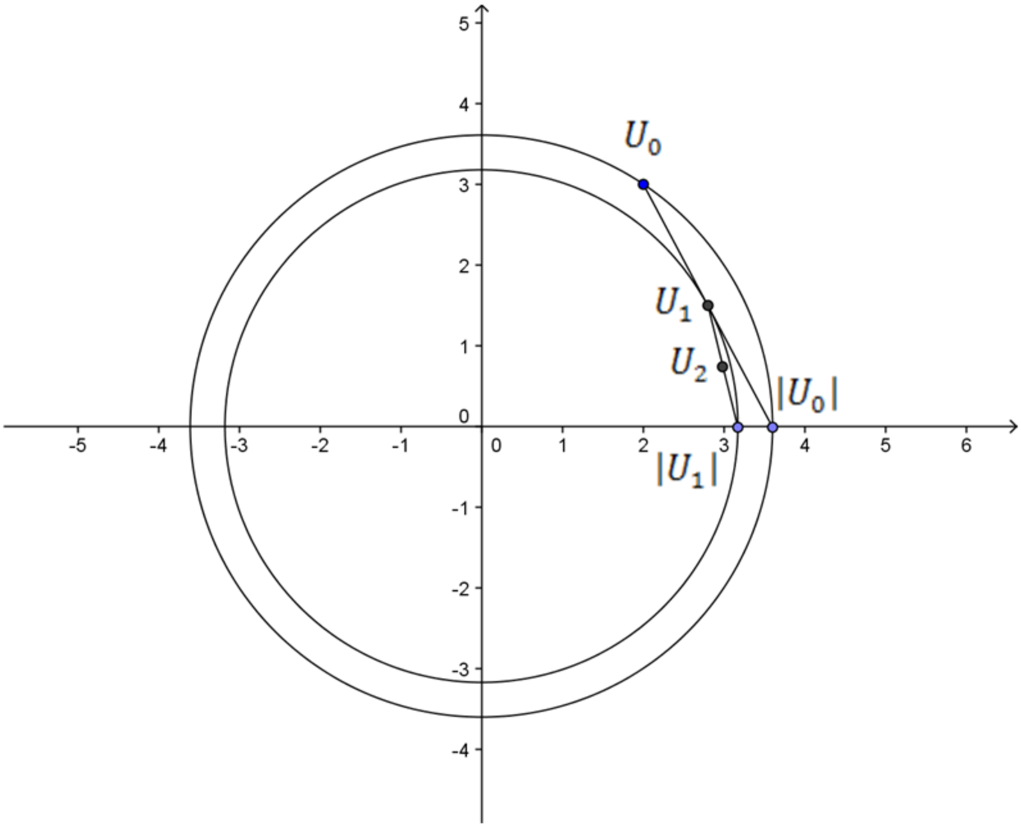
<u>Enoncé</u> : Etudier la limite de la suite complexe définie par

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} \begin{cases} \boldsymbol{U_0} \in \mathbb{C} \\ \boldsymbol{U_{n+1}} = \dfrac{\boldsymbol{U_n} + |\boldsymbol{U_n}|}{\boldsymbol{2}} \end{cases}$$

On précisera soit la valeur de cette limite, à défaut, un encadrement fonction de $\boldsymbol{U_0}$ ou de $\boldsymbol{U_1}$

<u>Solution</u> :

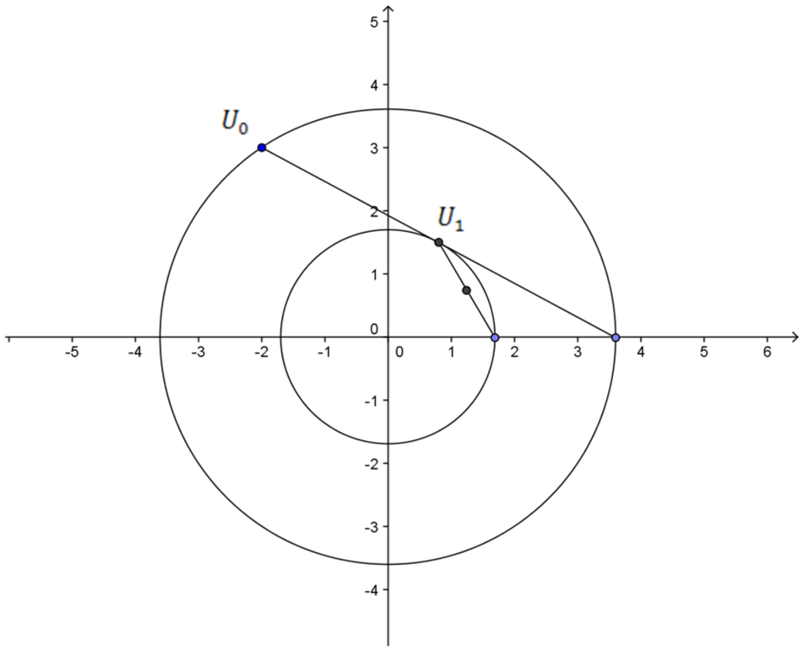
Commençons par faire un dessin avec U_0 de partie réelle et de partie imaginaire strictement positive. Le dessin suggère la conjecture suivante : U_n tend vers un nombre réel strictement positif situé dans le segment $]Re(U_0), |U_0|[$

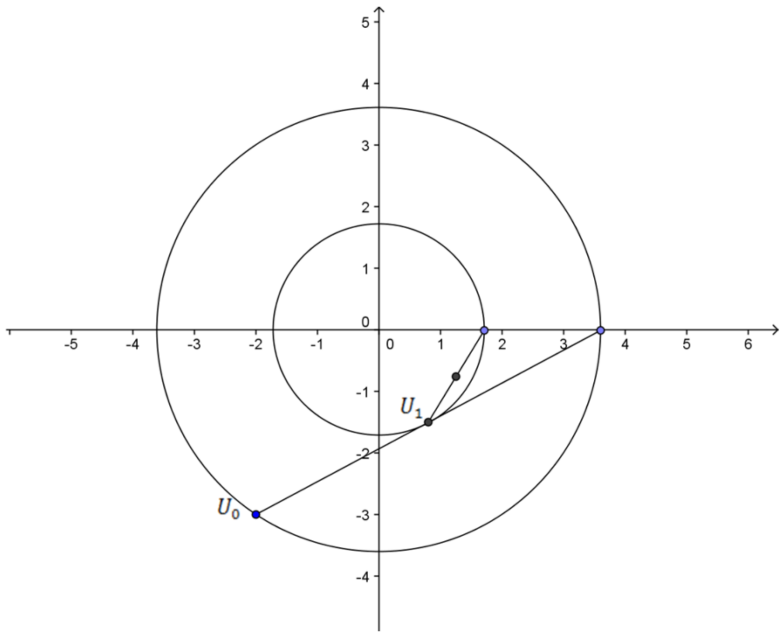


La même observation se fait avec U_0 de partie réelle strictement positive et de partie imaginaire strictement négative.

Voyons les autres situations.

Pour U_0 de partie réelle strictement négative et de partie imaginaire non nulle, il semble que $|U_1|$ soit à partie réelle et à partie imaginaire non nulle, ce qui aboutit à la même conjecture que précédemment.





Enfin, pour $U_0 \in]-\infty, 0]$ U_n semble égale à 0 au rang 1 et pour $U_0 \in]0, +\infty[$ U_n est de façon évidente constante et égale à U_0.

Démontrons maintenant les conjectures précédentes.

1ère conjecture : supposons $Re(U_0) > 0, Im(U_0) \neq 0$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = a_n + i\, b_n$$

Alors :

$$a_{n+1} + i\, b_{n+1} = \frac{a_n + i\, b_n + \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}}{2}$$

Donc :

$$\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}}{2} \\ b_{n+1} = \dfrac{b_n}{2} \end{cases}$$

D'où on tire :

$$\begin{cases} a_{n+1} - a_n = \dfrac{\sqrt{{a_n}^2 + \ {b_n}^2} - a_n}{2} = \dfrac{{b_n}^2}{2\sqrt{{a_n}^2 + \ {b_n}^2} + a_n} \\ b_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \ b_0 \end{cases}$$

Ainsi, d'une part :

$$\lim_{n \to +\infty} b_n = 0$$

D'autre part, par une récurrence triviale, on a $a_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et donc :

$$a_{n+1} - a_n > 0$$

La suite (a_n) est donc strictement croissante. Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|U_{n+1}| < \frac{|U_n| + |U_n|}{2} = |U_n|$$

Donc la suite (U_n) est strictement décroissante et ainsi :

$$|U_n| < |U_0|$$

Donc :

$$a_0 < a_n < |U_0|$$

Et ainsi :

$$\boxed{a_0 < \lim U_n = \lim a_n < |U_0|}$$

<u>2ème conjecture</u> : supposons $Re(U_0) < 0, Im(U_0) \neq 0$

Alors :

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{a_0 + \sqrt{{a_0}^2 + {b_0}^2}}{2} = \dfrac{{b_0}^2}{2\sqrt{{a_0}^2 + {b_0}^2} - a_0} \\ b_1 = \dfrac{b_0}{2} \end{cases}$$

Donc, d'une part :

$$b_1 \neq 0$$

D'autre part, quelque soit le signe de a_0 :

$$a_1 > 0$$

Les conclusions de la démonstration précédente s'en déduisent et donnent :

$$\boxed{a_1 < \lim U_n = \lim a_n < |U_1|}$$

<u>3ème conjecture</u> : supposons $U_0 \in]-\infty, 0]$ alors, par récurrence évidente, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{cases} U_n \leq 0 \\ U_{n+1} = 0 \end{cases}$$

La suite (U_n) est alors nulle dès le rang 1