

Enoncé :

Soit U une suite à termes strictement positifs et L un nombre réel. Montrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = L \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} = L$$

Application : Déterminer les limites des suites :

$$\sqrt[n]{\binom{2n}{n}}, \quad \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}, \quad \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}}$$

Solution :

Traitons d'abord le cas où $L > 0$

Soit $0 < \varepsilon < L$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow 0 < L - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{U_{n+1}}{U_n} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc :

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) U_{n_0} < U_{n_0+1} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) U_{n_0}$$

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 U_{n_0} < U_{n_0+2} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 U_{n_0}$$

Et par récurrence évidente sur un entier p :

$$\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)^p U_{n_0} < U_{n_0+p} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p U_{n_0}$$

Soit :

$$n \geq n_0 \Rightarrow \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} U_{n_0} < U_n < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} U_{n_0}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} U_{n_0}} < \sqrt[n]{U_n} < \sqrt[n]{\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} U_{n_0}}$$

$$\Rightarrow \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{U_{n_0}} < \sqrt[n]{U_n} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1-\frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{U_{n_0}}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1 - \frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{U_{n_0}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\left(1 - \frac{n_0}{n}\right) \ln\left(L - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \frac{1}{n} \ln(U_{n_0})} = L - \frac{\varepsilon}{2}$$

De même :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1 - \frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{U_{n_0}} = L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow L - \varepsilon < L - \frac{\varepsilon}{2} \leq \sqrt[n]{U_n} \leq L + \frac{\varepsilon}{2} < L + \varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} = L$$

Voyons maintenant le cas où $L = 0$

Soit $0 < \varepsilon$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n \geq n_0 \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

donc :

$$U_{n_0+1} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right) U_{n_0}$$

$$U_{n_0+2} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 U_{n_0}$$

Et par récurrence évidente sur un entier p :

$$U_{n_0+p} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^p U_{n_0}$$

Soit :

$$n \geq n_0 \Rightarrow U_n < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} U_{n_0}$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{U_n} < \sqrt[n]{\left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{n-n_0} U_{n_0}}$$

$$\Rightarrow 0 < \sqrt[n]{U_n} < \left(L + \frac{\varepsilon}{2}\right)^{1 - \frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{U_{n_0}}$$

Or

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(L + \frac{\varepsilon}{2} \right)^{1 - \frac{n_0}{n}} \sqrt[n]{U_{n_0}} = L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow -\varepsilon < \sqrt[n]{U_n} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{U_n} = 0$$

Applications :

a) Posons :

$$U_n = \binom{2n}{n}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\binom{2n+2}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{2(2n+1)}{(n+1)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 4$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\binom{2n}{n}} = 4$$

b) Posons

$$U_n = \frac{n^n}{n!}$$

$$\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{n^n} = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}$$

Or

$$n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n \cdot \frac{1}{n} \sim 1$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = e$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$$

c) Posons

$$U_n = \frac{(3n)!}{n! n^{2n}}$$

$$\begin{aligned} \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{\frac{(3n+3)!}{(n+1)!(n+1)^{2n+2}}}{\frac{(3n)!}{n! n^{2n}}} = \frac{(3n+3)!}{(n+1)!(n+1)^{2n+2}} \frac{n! n^{2n}}{(3n)!} \\ &= \frac{(3n+3)(3n+2)(3n+1)}{(n+1)(n+1)^2} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{2n} \\ &= \frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} e^{-2n \operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right)} \end{aligned}$$

Or

$$-2n \operatorname{Ln}\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim -2n \frac{1}{n} \sim -2$$

Et :

$$\frac{3(3n+2)(3n+1)}{(n+1)^2} \sim 27$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 27 e^{-2}$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n!}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{n! n^{2n}}} = 27 e^{-2}$$

