

Enoncé :

Déterminer la limite de la suite :

$$\frac{E\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right)}$$

Solution :

Posons : $k(n) = E\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)$, $q(n) = E\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right)$

alors :

$$k(n) \leq \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 < k(n) + 1$$

$$q(n) \leq \left(n - \frac{1}{2}\right)^2 < q(n) + 1$$

On en déduit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} k(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} q(n) = +\infty$$

Notons que pour $n \geq 2$: $k(n) > 0$, $q(n) > 0$ et on a :

$$\frac{1}{q(n) + 1} < \frac{1}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{1}{q(n)}$$

Soit :

$$\frac{k(n)}{q(n) + 1} < \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \leq \frac{k(n) + 1}{q(n)}$$

Or :

$$\frac{k(n)}{q(n) + 1} \sim \frac{k(n)}{q(n)}$$

$$\frac{k(n) + 1}{q(n)} \sim \frac{k(n)}{q(n)}$$

Donc, d'après l'encadrement :

$$\frac{k(n)}{q(n)} \sim \frac{\left(n + \frac{1}{2}\right)^2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)^2} \sim 1$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{E\left(\left(n + \frac{1}{2}\right)^2\right)}{E\left(\left(n - \frac{1}{2}\right)^2\right)} = 1$$