<u>Enoncé</u> :

On rappelle :

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-Ln(n)\right)=C$$

où C est la constante d'Euler

On considère la suite de terme général :

$$U_n=\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$

1) **Vérifier que le critère de d'Alembert ne s'applique pas à cette suite (On pourra considérer $Ln(U_{n+1})-Ln(U_n)$**
2) **Vérifier que le critère de Cauchy ne permet pas non plus de conclure**
3) **Exprimer $n\,Ln(U_n)$ sous forme d'une série**
4) **Montrer que la série converge et déterminer sa limite**
5) **En déduire la limite de U_n**

<u>Correction</u> :

1) Pour le critère de D'Alembert, On étudie :

$$Ln(U_{n+1})-Ln(U_n)$$

$$=Ln(n+1)-\frac{1}{n+1}\,Ln\big((n+1)!\big)-\left(Ln(n)-\frac{1}{n}\,Ln(n!)\right)$$

$$=Ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\,Ln(n+1)+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)Ln(n!)$$

$$=Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\,Ln(n+1)+\frac{1}{n\,(n+1)}Ln(n!)$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty}Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}\,Ln(n+1)=0$$

$$0\le\frac{1}{n\,(n+1)}Ln(n!)\le\frac{1}{n\,(n+1)}Ln(n^n)=\frac{1}{n+1}$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n\,(n+1)} Ln(n!) = 0$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} Ln(U_{n+1}) - Ln(U_n) = 0$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$$

Nous sommes donc dans le cas où le critère de d'Alembert ne permet pas de conclure.

Voyons pour le critère de Cauchy en étudiant :

$$Ln\left(\sqrt[n]{U_n}\right) = Ln\left(\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}\ Ln(n) - \frac{1}{n^2}\ Ln(n!)$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} Ln\left(\sqrt[n]{U_n}\right) = 0$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{U_n} = 1$$

Nous sommes donc là encore dans le cas où le critère de Cauchy ne permet pas de conclure.
Il faut donc une autre méthode.

2) Faisons apparaitre une somme télescopique :

$$n\ Ln(U_n) = n\ \left(Ln(n) - \frac{1}{n}\ Ln(n!)\right) = n\ Ln(n) - Ln(n!)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left[\left(k\ Ln(k) - Ln(k!)\right) - \left((k-1)\ Ln(k-1) - Ln\left((k-1)!\right)\right)\right]$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left((k-1)\ Ln(k) + Ln(k) - (k-1)\ Ln(k-1) - Ln\left(\frac{k!}{(k-1)!}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(-(k-1)\ Ln\left(\frac{k-1}{k}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} (1-k)\, Ln\left(1-\frac{1}{k}\right)$$

Or, en 0, on a le développement limité à l'ordre 2 :

$$Ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} + o(t^3)$$

Donc, pour k tendant vers l'infini :

$$(1-k)\, Ln\left(1-\frac{1}{k}\right) = (1-k)\, \left(-\frac{1}{k} - \frac{1}{2\,k^2} - \frac{1}{3\,k^3} + o\left(\frac{1}{k^3}\right)\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2\,k} - \frac{1}{6\,k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

Ainsi :

$$n\, Ln(U_n) = \sum_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{1}{2\,k} - \frac{1}{6\,k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} 1 - \frac{1}{2} \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{6} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

$$= n - 1 - \frac{1}{2}\,(Ln(n) - 1 + C) + o(1) - \frac{1}{6} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)$$

Posons, après avoir noté que la série converge :

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{k^2} + o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right) = L$$

On a alors :

$$Ln(U_n) = 1 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\,\frac{Ln(n)}{n} - \frac{C}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{6\,n}\,(L + o(1))$$

D'où

$$\lim_{n \to +\infty} Ln(U_n) = 1$$

Ainsi :

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = e}$$