<u>Défi numéro 1</u> : Déterminer un équivalent pour $n \to +\infty$ de la suite :

$$\boldsymbol{U_n = \int_0^1 Ln(1+t^n)\,dt}$$

En déduire, pour $a > 0$, un équivalent de :

$$\boldsymbol{V_n = \int_0^1 Ln(1+t^{a\,n})\,dt}$$

<u>Défi numéro 2</u> : Déterminer un équivalent pour $n \to +\infty$ de la suite :

$$\boldsymbol{W_n = \int_0^1 sin(t^n)\,dt}$$

<u>Réponse :</u>

<u>Défi numéro 1 :</u>

<u>Première étape</u> : On commence par une démarche sans souci de rigueur et de justification afin d'avoir une idée de l'équivalent cherché. Etant donné qu'on sait facilement intégrer des monômes en t, on a l'idée de remplacer la fonction à intégrer par son développement en série entière en partant du développement de référence, pour $x \in]-1,1]$

$$Ln(1+x) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1}\ \frac{x^p}{p}$$

qui donne pour $t \in\ [0,1]$, soit $x = t^n \in\ [0,1]$:

$$Ln(1+t^n) = \sum_{p=1}^{+\infty} (-1)^{p-1}\ \frac{t^{n\,p}}{p}$$

La série étant alternée, nous avons pour tout entier naturel N, une majoration du reste de rang N :

$$\left| Ln(1+t^n) - \sum_{p=N+1}^{+\infty} (-1)^{p-1}\ \frac{t^{n\,p}}{p} \right| \leq \left| (-1)^{N+1-1}\ \frac{t^{n\,(N+1)}}{N+1} \right| = \frac{1}{N+1}$$

La convergence de la série est donc normale, donc uniforme sur $[0,1]$. On peut donc intégrer terme à terme :

$$\boxed{\boldsymbol{\int_0^1 Ln(1+t^n)\,dt = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p} \int_0^1 t^{n\,p}\,dt\ = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p\,(n\,p+1)}}}$$

Comme $n\,p + 1$ est équivalent à $n\,p$ en $+\infty$, on est amené à formuler intuitivement la conjecture suivante :

$$\int_0^1 Ln(1+t^n)\,dt \sim \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{n\,p^2} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{p-1}}{p^2} = \frac{1}{n}\,\frac{\pi^2}{12} = \frac{\pi^2}{12\,n}$$

<u>Deuxième étape</u> : Preuve de la conjecture :

Considérons :

$$\left|\int_0^1 Ln(1+t^n)\,dt - \frac{\pi^2}{12\,n}\right| = \left|\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p\,(n\,p+1)} - \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{n\,p^2}\right|$$

$$= \left|\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\left(\frac{1}{n\,p+1}-\frac{1}{n\,p}\right)\right|$$

$$\left|\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{p}}{n\,p^2\,(n\,p+1)}\right| \leq \sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,p^2\,n\,p} = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{+\infty}\frac{1}{p^3}$$

On en déduit :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\int_0^1 Ln(1+t^n)\,dt - \frac{\pi^2}{12\,n}}{\frac{\pi^2}{12\,n}} = 0$$

Ainsi :

$$\boxed{\boldsymbol{\int_0^1 Ln(1+t^n)\,dt \sim \frac{\pi^2}{12\,n}}}$$

Par une démarche en tout point analogue, on aboutit à :

$$\boxed{\boldsymbol{\int_0^1 Ln(1+t^{a\,n})\,dt \sim \frac{\pi^2}{12\,a\;n}}}$$

<u>Défi numéro 2 :</u>

On s'inspire de la démarche précédente en notant que sur $\mathbb{R}$:

$$sin(x) = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p\ \frac{x^{2\,p+1}}{(2\,p+1)\,!}$$

qui donne pour $t \in\ [0,1]$, soit $x = t^n \in\ [0,1]$:

$$sin(t^n) = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\ \frac{t^{(2\,p+1)\,n}}{(2\,p+1)\,!}$$

Et en intégrant terme à terme :

$$\int_0^1 sin(t^n)\,dt = \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\ \frac{1}{(2\,p+1)\,!\,((2\,p+1)\,n+1)}$$

Et on en déduit comme précédemment un équivalent :

$$\int_0^1 sin(t^n)\,dt \sim \sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\ \frac{1}{(2\,p+1)\,!\,((2\,p+1)\,n} = \frac{1}{n}\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1}\ \frac{1}{(2\,p+1)\,!\,((2\,p+1)}$$

Or :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^p \ \frac{x^{2\,p}}{(2\,p+1)\,!}=\frac{sin(x)}{x}$$

Donc en intégrant la série terme à terme et en prolongeant $\frac{sin(x)}{x}$ par continuité en 0, on en déduit :

$$\sum_{p=1}^{+\infty}(-1)^{p-1} \ \frac{1}{(2\,p+1)\,!\,((2\,p+1)}=\int_0^1\frac{sin(x)}{x}\ dx$$

Ainsi :

$$\boxed{\int_0^1 \boldsymbol{sin(t^n)\ dt \sim \frac{1}{n}\int_0^1\frac{sin(x)}{x}\ dx}}$$