Enoncé

On considère deux variables aléatoires réelles indépendantes X et Y suivant la même loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

On note :

$$\boldsymbol{U = \frac{1}{2}\ (X + Y)}$$

$$\boldsymbol{V = \frac{1}{2}\ (X - Y)}$$

1) **Calculer l'espérance et la variance de U et de V**
2) **Déterminer la densité de U puis celle de V**

Solution

1) On a

$$\begin{aligned} E(U) &= \frac{1}{2}\ \big(E(X) + E(Y)\big) = \frac{1}{2}\ (1+1) = 1 \\ V(U) &= \frac{1}{4}\ \big(V(X) + V(Y)\big) = \frac{1}{4}\ (1+1) = \frac{1}{2} \\ E(V) &= \frac{1}{2}\ \big(E(X) - E(Y)\big) = \frac{1}{2}\ (1-1) = 0 \\ V(V) &= \frac{1}{4}\ \big(V(X) + V(Y)\big) = \frac{1}{4}\ (1+1) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) On a pour la fonction de répartition de U :

$$F_U(x) = P(U \leq x) = P(X + Y \leq 2\,x) = F_{X+Y}(2\,x)$$

Donc pour sa densité :

$$f_U(x) = F'_U(x) = 2\ f_{X+Y}(2\,x)$$

Où f_{X+Y} est la densité de la variable somme de X et de Y définie par :

$$f_{X+Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-t)\ f_Y(t)\ dt$$

Soit pour $u \geq 0$:

$$f_{X+Y}(u) = \int_{0}^{u} e^{-(u-t)}\ e^{-t}\ dt = u\ e^{-u}$$

Et pour $u < 0$:

$$f_{X+Y}(u) = 0$$

D'où pour $x \geq 0$:

$$f_U(x) = 4\,x\,e^{-2\,x}$$

Et pour $x < 0$:

$$f_U(x) = 0$$

Vérifions que nous avons bien affaire à une densité :

$$\int_0^{+\infty} 4\,x\,e^{-2\,x}\,dx = \left[4\,x\,\frac{e^{-2\,x}}{-2}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} e^{-2\,x}\,dx = 2\left[\frac{e^{-2\,x}}{-2}\right]_0^{+\infty} = 1$$

Voyons la densité de V maintenant.

$$F_V(x) = P(V \leq x) = P(X - Y \leq 2\,x) = F_{X-Y}(2\,x)$$

Donc pour sa densité :

$$f_V(x) = F_V'(x) = 2\,f_{X-Y}(2\,x)$$

Où f_{X-Y} est la densité de la variable somme de X et de $-Y$ définie par :

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-t)\;f_{-Y}(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(u-t)\;f_Y(-t)\,dt$$

Soit pour $u > 0$:

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{0} e^{-(u-t)}\,e^{t}\,dt \;= e^{-u}\left[\frac{e^{2\,t}}{2}\right]_{-\infty}^{0} = \frac{e^{-u}}{2}$$

Et pour $u \leq 0$:

$$f_{X-Y}(u) = \int_{-\infty}^{u} e^{-(u-t)}\,e^{t}\,dt \;= e^{-u}\left[\frac{e^{2\,t}}{2}\right]_{-\infty}^{u} = \frac{e^{u}}{2}$$

D'où pour $x > 0$:

$$f_V(x) = \;e^{-2\,x}$$

et pour $x \leq 0$:

$$f_V(x) = e^{2\,x}$$

Vérifions que nous avons bien affaire à une densité :

$$\int_{-\infty}^{0} e^{2\,x}\,dx + \int_{0}^{+\infty} e^{-2\,x}\,dx = \left[\frac{e^{2\,x}}{2}\right]_{-\infty}^{0} + \left[-\,\frac{e^{-2\,x}}{2}\right]_{0}^{+\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$