Séries remarquables

<u>Exercice 1</u> :

Etudier la convergence de la série de terme général

$$\boldsymbol{U_n = Ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}$$

et calculer sa somme

<u>Exercice 2</u> :

Etudier pour $\boldsymbol{q} \in \mathbb{N}^*$ la convergence de la série de terme général et calculer sa somme

$$\boldsymbol{U_n = \frac{1}{n\,(n+q)}}$$

et calculer sa somme

<u>Solutions</u> :

<u>Exercice 1</u> :

$$U_n \sim -\frac{1}{n^2}$$

Donc la série est convergente

De plus :

$$\sum_{k=2}^{n} U_k = \sum_{k=2}^{n} Ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} Ln\left(\frac{k^2 - 1}{k^2}\right) = \sum_{k=2}^{n} Ln\left(\frac{(k+1)\,(k-1)}{k^2}\right)$$

$$= \sum_{k=2}^{n} \left(Ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - Ln\left(\frac{k}{k-1}\right)\right)$$

Il s’agit d’une somme télescopique, donc :

$$\sum_{k=2}^{n} U_k = Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - Ln(2)$$

D’où :

$$\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} U_k = -Ln(2)}$$

<u>Exercice 2</u>

$$U_n \sim -\frac{1}{n^2}$$

Donc la série est convergente

De plus :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k\,(k+q)} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} \frac{q}{k\,(k+q)}$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n} \frac{k+q-k}{k\,(k+q)} = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+q}\right)$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+q}\right) = \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{q}\left(\frac{1}{k+p-1} - \frac{1}{k+p}\right)$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{p=1}^{q}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+p-1} - \frac{1}{k+p}\right)$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{p=1}^{q}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k-1+p} - \frac{1}{k+p}\right)$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{p=1}^{q}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n+p}\right)$$

$$= \frac{1}{q}\sum_{p=1}^{q}\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\sum_{p=1}^{q}\frac{1}{n+p}$$

Et :

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{p=1}^{q}\frac{1}{n+p}=0$$

Donc :

$$\boxed{\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{k\,(k+q)}=\frac{1}{q}\sum_{p=1}^{q}\frac{1}{p}}$$