PROBLEME I : Autour des séries de fonctions

On rappelle que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

PARTIE I : Etude d'une fonction définie par la somme d'une série

On considère la fonction F donnée par : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$.

1. Définition de la fonction F

1.a) Montrer que l'ensemble de définition de F est $\mathbb{R} \setminus \{-n | n \in \mathbb{N}^*\}$

1.b) Calculer $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$

Dans la suite on étudie la fonction F uniquement sur $\mathbb{R}^+$

2. Continuité de F sur $\mathbb{R}^+$.

2.a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$

2.b) Etablir que : $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, F(y) - F(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

En déduire que sur $\mathbb{R}^+$, F est $\frac{\pi^2}{6}$−lipschitzienne.

3. Dérivabilité de F

3.a) Prouver que F est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner, pour tout $x \geqslant 0$, la valeur de $F'(x)$ sous forme de somme d'une série. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $F'(1)$.

3.b) Montrer que, sur $\mathbb{R}^+$, F est une fonction croissante et concave.

Retrouver le fait que sur $\mathbb{R}^+$, F est $\frac{\pi^2}{6}$−lipschitzienne.

4. Limite de F au voisinage de $+\infty$

4.a) On suppose F majorée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que : $\exists M \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right) \leqslant M$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leqslant M$. Conclure.

4.b) Montrer que $\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$

5. Equivalent de F au voisinage de $+\infty$.

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose φ_x la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $\forall t \in [1, +\infty[$, $\varphi_x(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{x+t}$

5.a) Calculer, pour $y > 1$, $J_x(y) = \int_1^y \varphi_x(t)\, dt$ puis $\ell(x) = \lim_{y \to +\infty} J_x(y)$.

5.b) Prouver que $\forall n \geqslant 1$, $\varphi_x(n+1) \leqslant \int_n^{n+1} \varphi_x(t)\, dt \leqslant \varphi_x(n)$

En déduire que : $\ell(x) \leqslant F(x) \leqslant 1 + \ell(x)$

5.c) Conclure que, lorsque x tend vers $+\infty$, $F(x) \sim \ln(x)$

PARTIE II : Etude d'équations fonctionnelles

1. Soit a un réel quelconque. On se propose de prouver qu'il existe une unique fonction f_a, définie sur $]0,+\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

$$C_1(a) : \begin{cases} \forall x>0,\ f_a(x+1)-f_a(x)=\dfrac{1}{x} \\ f_a(1)=a \\ f_a \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

1.a) On suppose que deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ sont solutions de $C_1(a)$ et on pose $\delta=g-h$. Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}_+^*,\ \delta(x+1)=\delta(x)$ et préciser la valeur de $\delta(n)$ pour tout entier n non nul.

1.b) Montrer que : $\forall x\in]0,1], \forall n\in\mathbb{N}^*,\ -\dfrac{1}{n}\leqslant\delta(x+n)\leqslant\dfrac{1}{n}$. En déduire que :

$$\forall x>0,\ g(x)=h(x)$$

1.c) Montrer que l'unique solution de $C_1(a)$ est la fonction f_a définie par :

$$\forall x>0, f_a(x)=a-\frac{1}{x}+F(x)$$

où F est la fonction étudiée dans la deuxième partie.

2. On se propose de prouver qu'il existe une unique fonction g, dérivable sur $]0,+\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

$$C_2 : \begin{cases} \forall x>0,\ g(x+1)-g(x)=\ln(x) \\ g(1)=0 \\ g' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

2.a) On suppose que g est solution de C_2

i. Montrer que g' est solution de $C_1(\alpha)$ avec $\alpha=g'(1)$

ii. Calculer $g(2)-g(1)$ de deux manières afin de montrer que $\alpha=-\displaystyle\int_1^2 f_0(t)\mathrm{d}t$ où f_0 est la solution de $C_1(0)$

iii. Montrer que : $\forall x>0, g(x)=\alpha(x-1)+\displaystyle\int_1^x f_0(t)\mathrm{d}t$

2.b) Montrer que C_2 admet une unique solution.

2.c) Montrer que pour tout réel $x>0$, la série $\displaystyle\sum_{n>0}\left(x\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln\left(\frac{x+n}{n}\right)\right)$ est convergente.

2.d) Prouver que l'unique solution de C_2 est donnée par :

$$\forall x>0,\ g(x)=-\ln(x)+\sum_{n=1}^{+\infty}\left(x\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)-\ln\left(\frac{x+n}{n}\right)\right)$$

3. On se propose de prouver qu'il existe une unique fonction h, dérivable sur $]0,+\infty[$, à valeurs strictement positives vérifiant les conditions suivantes :

$$C_3 : \begin{cases} \forall x>0,\ h(x+1)=x\,h(x) \\ h(1)=1 \\ \ln\circ h \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

3.a) Prouver l'existence et l'unicité de h et l'exprimer en fonction de g

3.b) Calculer la valeur de $h(p)$ pour tout entier naturel non nul p.

3.c) On pose, pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $x>0$, $v_n(x)=\dfrac{(n+1)^x\,n!}{x(x+1)\dots(x+n)}$. Montrer que la suite de fonctions $(v_n)_{n>0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers h.

3.d) Exprimer $v_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ en fonction du coefficient binomial $\dbinom{2n}{n}$ et en déduire la valeur de $h\left(\dfrac{1}{2}\right)$

Cette fonction h est en fait la fonction Γ appelée fonction gamma d'Euler et dont l'une des propriétés fondamentales est d'extrapoler la suite factorielle.

Correction

Partie I

1 a) soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ alors si $x \neq 0$ et en $+\infty$ pour n :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n\,(n+x)} \sim \frac{x}{n^2}$$

Donc la série de fonction associée converge et $F(x)$ est définie. En outre :

$$F(0) = 0$$

Si $x = -m$, $m \in \mathbb{N}$ le terme de rang m de la série n'est pas défini donc $F(x)$ n'est pas définie.

Ainsi :

$$D_F = \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

1 b)

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

$$F(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)\right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2 a) Posons :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

sur $[a, b] \subset [0, +\infty[$:

$$|f_n(x)| = \left|\frac{x}{n\,(n+x)}\right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{b}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{b}{n^2}$ étant convergente, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est donc normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, b]$. Comme chaque terme est une fonction continue sur $[a, b]$, la limite uniforme $F(x)$ est donc continue sur $[a, b]$.

2 b) soit $(x, y) \in [0, +\infty[^2$ alors :

$$F(y) - F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y}\right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y-x}{(n+x)(\,n+y)} =$$

$$(y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(\,n+y)}$$

Donc :

$$|F(y)-F(x)|=(y-x)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)(\,n+y)}\leq(y-x)\ \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n\,n}=(y-x)\ \frac{\pi^2}{6}$$

3 a) les $f_n(x)$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et :

$$f'_n(x)=\frac{1}{(n+x)^2}$$

Donc sur $[0,+\infty[$:

$$|f'_n(x)|\leq\frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $f'_n(x)$ converge donc normalement sur $[0,+\infty[$. On peut donc dériver $F(x)$ sur $[0,+\infty[$ terme à terme :

$$F'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$$

On en déduit :

$$F'(0)=\frac{\pi^2}{6}$$

$$F'(1)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\frac{\pi^2}{6}-1$$

3 b) On a sur $[0,+\infty[$: $F'(x)\geq 0$ donc F est croissante sur $[0,+\infty[$.

les $f'_n(x)$ sont dérivables sur $[0,+\infty[$ et :

$$f''_n(x)=-\frac{2}{(n+x)^3}$$

Donc sur $[0,+\infty[$:

$$|f''_n(x)|\leq\frac{2}{n^3}$$

La série de terme général $f''_n(x)$ converge donc normalement sur $[0,+\infty[$. On peut donc dériver $F'(x)$ sur $[0,+\infty[$ terme à terme :

$$F''(x)=-\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{(n+x)^3}\leq 0$$

F est donc concave sur $[0,+\infty[$

4) Supposons :

$$\exists\ M\in\,]0,+\infty[\ :\ \forall\ x\in[0,+\infty[\ :\ \sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+x}\right)\leq M$$

Alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* : \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right) \leq M$$

Et, en faisant tendre x vers $+\infty$, à N fixé, on obtient par passage à la limite dans l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} \leq M$$

Or :

$$\lim_{N \to +\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} = +\infty$$

Ceci apporte une contradiction. Donc F est donc croissante et non majorée sur $[0, +\infty[$ donc :

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty$$

5 a)

$$J_x(y) = \int\limits_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt = \left[Ln\left(\frac{t}{t+x}\right)\right]_1^y = Ln\left(\frac{y}{y+x}\right) - Ln\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

On en déduit :

$$l(x) = \int\limits_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x}\right) dt = -Ln\left(\frac{1}{1+x}\right) = Ln(x+1)$$

5 b) on a sur $[n, n+1]$:

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t\,(t+x)}$$

qui est une fonction décroissante de t à x fixé, donc, sur $[n, n+1]$:

$$\varphi_x(n+1) \leq \varphi_x(t) \leq \varphi_x(n)$$

D'où :

$$\int_n^{n+1} \varphi_x(n+1)\ dt \ \leq \int_n^{n+1} \varphi_x(t)\ dt \ \leq \int_n^{n+1} \varphi_x(n)\ dt$$

Soit :

$$\varphi_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi_x(t)\, dt \leq \varphi_x(n)$$

En sommant de 1 à $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \varphi_x(n+1) \leq \sum_{n=1}^{N} \int_n^{n+1} \varphi_x(t)\, dt \ \leq \sum_{n=1}^{N} \varphi_x(n)$$

Puis en faisant tendre N vers l'infini :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_x(n+1) \leq \int_1^{+\infty} \varphi_x(t)\,dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_x(n)$$

$$F(x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq l(x) \leq F(x)$$

Soit :

$$F(x) \leq l(x) + 1 - \frac{1}{x} \leq l(x) + 1$$

Ainsi :

$$l(x) \leq F(x) \leq l(x) + 1$$

5 c)

$$Ln(x+1) \leq F(x) \leq Ln(x+1) + 1$$

Et pour $x > 1$:

$$\frac{Ln(x+1)}{Ln(x)} \leq \frac{F(x)}{Ln(x)} \leq \frac{Ln(x+1)+1}{Ln(x)}$$

Or en $+\infty$:

$$\frac{Ln(x+1)}{Ln(x)} \sim \frac{Ln(x)}{Ln(x)} = 1, \qquad \frac{Ln(x+1)+1}{Ln(x)} \sim \frac{Ln(x)}{Ln(x)} = 1$$

Donc :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{F(x)}{Ln(x)} = 1$$

Ainsi :

$$F(x) \sim Ln(x)$$

Partie II :

1 a) Soients g et h deux solutions de $\mathcal{C}_1(a)$ et $\delta = g - h$. Alors :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[:\ \delta(x+1) - \delta(x) = \big(g(x+1) - g(x)\big) - \big(h(x+1) - h(x)\big) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

Donc :

$$\delta(x+1) = \delta(x)$$

Il en découle :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* :\ \delta(n+1) = \delta(n)$$

La suite $\big(\delta(n)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc la suite constante de valeur $\delta(1) = 0$

1 b) Soit $x \in]0,1[$ alors :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^* :\ x + n \in]n, n+1[$$

Donc :

$$g(n) \leq g(x+n) \leq g(n+1)$$

$$-h(n+1) \leq -h(x+n) \leq -h(n)$$

D'où :

$$g(n) - h(n+1) \leq g(x+n) - h(x+n) \leq g(n+1) - h(n)$$

Soit :

$$h(n) - h(n+1) \leq g(x+n) - h(x+n) \leq g(n+1) - g(n)$$

finalement :

$$-\frac{1}{n} \leq \delta(x+n) \leq \frac{1}{n}$$

Or :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} :\ \delta(x+n+1) = \delta(x+n)$$

La suite $\left(\delta(x+n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc la suite constante de valeur $\delta(x)$

Ainsi, sur $]0,1[$:

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*: -\frac{1}{n} \leq \delta(x) \leq \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\delta(x) = 0$$

Or pour $x \in]0,1]$: $\delta(x+n) = \delta(x) = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

pour $x \in]n, n+1]$: $\delta(x) = 0$

Or :

$$]0,+\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]n, n+1]$$

On en déduit :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[:\ \delta(x) = 0$$

1 c) Posons :

$$f_a(x) = a - \frac{1}{x} + F(x)$$

D'une part, f_a est croissante sur $]0,+\infty[$

D'autre part :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[:\ f_a(x+1) - f_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + F(x+1) - F(x)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}$$

Enfin :

$$f_a(1) = a - 1 + F(1) = a$$

f_a est donc solution de $\mathcal{C}_1(a)$, c'est donc l'unique solution.

2 a)

i) Soit g solution de $\mathcal{C}_2$ alors :

D'une part :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[\, : \; g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x}$$

D'autre part :

$$g' \; croissante \; sur \;]0,+\infty[$$

Donc g' est solution de $\mathcal{C}_1(\alpha)$ où $\alpha = g'(1)$

ii) On a d'une part :

$$g(2) - g(1) = Ln(1) = 0$$

D'autre part :

$$g(2) - g(1) = \int_1^2 g'(x)\, dx = \int_1^2 \left(\alpha - \frac{1}{x} + F(x) \right) dx = \alpha - \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - F(x) \right) dx$$

On en déduit :

$$\alpha = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - F(x) \right) dx = - \int_1^2 f_0(x)\, dx$$

iii) On a :

$$\forall\, x \in]0,+\infty[\, : \; g'(x) = \alpha - \frac{1}{x} + F(x) = \alpha + f_0(x)$$

Donc :

$$\int_1^x g'(t)\, dt = \int_1^x \big(\alpha + f_0(t) \big)\, dt$$

$$g(x) - g(1) = \alpha\,(x-1) + \int_1^x f_0(t)\, dt$$

D'où :

$$g(x) = \alpha\,(x-1) + \int_1^x f_0(t)\, dt$$

2 b) On considère sur $]0,+\infty[$:

$$g(x) = -(x-1)\int_1^2 f_0(x)\,dx \; + \int_1^x f_0(t)\,dt$$

On a :

g est dérivable sur $]0,+\infty[$

$g(1) = 0$

$\forall x \in]0,+\infty[:\; g'(x) = -\int_1^2 f_0(x)\,dx + f_0(x)\,, g''(x) = f'_0(x) = \frac{1}{x^2} + F'(x) \geq 0$

g' est donc croissante sur $]0,+\infty[$

$\forall x \in]0,+\infty[:\; g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x}$

Donc :

$$\int_1^x \big(g'(t+1) - g'(t)\big)\,dx = Ln(x)$$

Soit :

$$\big(g(x+1) - g(x)\big) - \big(g(2) - g(1)\big) = Ln(x)$$

$$g(x+1) - g(x) = Ln(x)$$

g est donc solution de $\mathcal{C}_2$. C'est donc l'unique solution.

2 c) Soit $x \in]0,+\infty[$:

$$x\,Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - Ln\left(\frac{x+n}{n}\right) = x\,Ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - Ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$$

$$= x\,\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)$$

$$= \frac{x - x^2}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Si $x \neq 1$ alors :

$$x\,Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - Ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \sim \frac{x - x^2}{2\,n^2}$$

et la série est absolument convergente

Si $x = 1$ alors :

$$x\,Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - Ln\left(\frac{x+n}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et la série est absolument convergente

2 d) Posons pour $x > 0$:

$$g(x) = -Ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x\, Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - Ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \right)$$

Alors

$g(1) = 0$

$\forall x \in]0, +\infty[:\ g(x+1) - g(x) = Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - Ln\left(\frac{x+1+n}{x+n}\right) \right)$

$$= Ln\left(\frac{x}{x+1}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(Ln\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right) - Ln\left(\frac{n}{x+n}\right) \right)$$

$$= Ln(x) - Ln(x+1) - Ln\left(\frac{1}{x+1}\right) = Ln(x)$$

Montrons que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en posant :

$$g_n(x) = x\, Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - Ln\left(\frac{x+n}{n}\right)$$

Les g_n sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et :

$$g'_n(x) = Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{x+n}$$

Sur $[a, b] \subset]0, +\infty[$:

$$Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{a+n} \leq g'_n(x) \leq Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{b+n}$$

Posons :

$$c_n = Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{a+n}, \qquad d_n = Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{b+n}$$

$$|g'_n(x)| \leq \sup|c_n|, |d_n|$$

Or les séries de terme général c_n et d_n sont absolument convergentes (par développement limité)

Donc la série de fonction de terme général $g'_n(x)$ converge normalement sur $[a, b]$. On peut donc dériver $g(x)$ terme à terme. Ainsi :

$$g'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(Ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{x+n} \right)$$

Pour des raisons analogues (convergence normale), on peut à nouveau dériver sous le signe somme et :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \geq 0$$

g' est donc croissante sur $]0,+\infty[$

g est donc solution de $\mathcal{C}_2$. C'est donc l'unique solution.

3) Posons pour $h > 0$ $dérivable : g_1 = Ln(h)$

$$h \text{ } solution \text{ } de \text{ } \mathcal{C}_3 \iff \begin{cases} \forall x > 0 : h(x+1) = x\, h(x) \\ h(1) = 1 \\ Ln \circ h \text{ } convexe \text{ } sur \text{ }]0,+\infty[\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x > 0 : Ln\big(h(x+1)\big) = Ln(x) + Ln(h(x)) \\ Ln\big(h(1)\big) = 0 \\ Ln \circ h \text{ } convexe \text{ } sur \text{ }]0,+\infty[\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \forall x > 0 : g_1(x+1) - g_1(x) = Ln(x) \\ g_1(1) = 0 \\ g_1 \text{ } convexe \text{ } sur \text{ }]0,+\infty[\end{cases}$$

$$\iff g_1 \text{ } solution \text{ } de \text{ } \mathcal{C}_2$$

On en déduit l'unique solution de $\mathcal{C}_3$:

$$h(x) = e^{g(x)}$$

3 b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h(n+1) = n\, h(n)$$

donc par récurrence :

$$h(n) = (n-1)!\, h(1) = (n-1)!$$

3 c)

$$v_n(x) = \frac{(n+1)^x\, n!}{x\,(x+1)\dots(x+n)}$$

$$Ln\big(v_n(x)\big) = x\, Ln(n+1) + \sum_{k=1}^{n} Ln(k) - Ln(x) - \sum_{k=1}^{n} Ln(x+k)$$

$$= -Ln(x) + \sum_{k=1}^{n}\left(x\, Ln(k+1) - x\, Ln(k) - Ln\left(\frac{x+k}{k}\right)\right)$$

$$= -Ln(x) + \sum_{k=1}^{n}\left(x\, Ln\left(\frac{k+1}{k}\right) - Ln\left(\frac{x+k}{k}\right)\right)$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} Ln\big(v_n(x)\big) = g(x)$$

D'où :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n(x) = e^{g(x)} = h(x)$$

3 d)

$$v_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}}\, n!}{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\ldots\left(\frac{1}{2}+n\right)} = \frac{2^{n+1}\,(n+1)^{\frac{1}{2}}\, n!}{1 \times 3 \times \ldots \times (2\,n+1)}$$

$$= \frac{2 \times 4 \times \ldots \times 2\,n \times 2^{n+1}\,(n+1)^{\frac{1}{2}}\, n!}{(2\,n)\,!\ (2\,n+1)}$$

$$= \frac{2^n\, n\,! \times 2^{n+1}\,(n+1)^{\frac{1}{2}}\, n!}{(2\,n)\,!\ (2\,n+1)}$$

$$= \frac{(n\,!)^2 \times 2^{2\,n+1}\,(n+1)^{\frac{1}{2}}}{(2\,n)\,!\ (2\,n+1)} = \frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)^{\frac{1}{2}}}{\binom{2n}{n}\ (2\,n+1)}$$

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} v_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)^{\frac{1}{2}}}{\binom{2n}{n}\ (2\,n+1)}$$

On rappelle l'équivalent de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\,\pi\,n}$$

D'où on tire :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2\,n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\left(\frac{2\,n}{e}\right)^{2\,n}\sqrt{2\,\pi\,2\,n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2\,n}\,2\,\pi\,n} = \frac{2^{2\,n}}{\sqrt{\pi}\,\sqrt{n}}$$

Ainsi :

$$\frac{2^{2\,n+1}\,(n+1)^{\frac{1}{2}}}{\binom{2n}{n}\ (2\,n+1)} \sim \frac{2^{2\,n+1}\,\sqrt{n}\,\sqrt{\pi}\,\sqrt{n+1}}{2^{2\,n}\,2\,n} \sim \sqrt{\pi}$$

Donc :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$