Séries numériques- Equivalents et développements limités

Exercice 1 :

Etudier la convergence de la série de terme général

$$\boldsymbol{U_n = e - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Solution :

Effectuons un développement limité de U_n afin d'en déterminer un équivalent.

$$U_n = e - e^{n\,Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)} = -e\ \left(e^{n\,Ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1} - 1\right)$$

Or :

$$n\,Ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim n\ \frac{1}{n} \sim 1$$

Donc :

$$\lim_{n\to+\infty} n\,Ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = 0$$

Rappelons qu'en 0 :

$$e^x - 1 \sim x$$

donc :

$$U_n \sim -e\ \left(n\,Ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1\right)$$

Rappelons également qu'en 0 :

$$Ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$$

Donc :

$$n\,Ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 = n\ \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2\,n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - 1$$

$$= -\frac{1}{2\,n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

D'où :

$$U_n \sim \frac{e}{2\,n}$$

La série est donc divergente