Séries numériques

Exercice 1 :

Etudier la convergence de la série de terme général :

$$\boldsymbol{U_n = e^{-\sqrt{n}}}$$

et de façon plus générale, pour $\boldsymbol{p}$ réels $\boldsymbol{b_i}$ et $\boldsymbol{\alpha_i}$ strictement positifs, des séries de terme général :

$$\boldsymbol{U_n = e^{-\sum_{i=1}^{p} b_i\, n^{\alpha_i}}}$$

Solution :

$$n^2\, e^{-\sqrt{n}} = e^{Ln\left(n^2\, e^{-\sqrt{n}}\right)} = e^{2\, Ln(n)-\sqrt{n}}$$

Or :

$$2\, Ln(n) - \sqrt{n} \sim -\sqrt{n}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 2\, Ln(n) - \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} -\sqrt{n} = -\infty$$

d'où :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2\, e^{-\sqrt{n}} = 0$$

Un travail analogue se fait pour la généralisation en supposant par exemple que

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_p$$

$$n^2\, e^{-\sum_{i=1}^{p} b_i\, n^{\alpha_i}} = e^{Ln\left(n^2\, e^{-\sum_{i=1}^{p} b_i\, n^{\alpha_i}}\right)} = e^{2\, Ln(n)-\sum_{i=1}^{p} b_i\, n^{\alpha_i}}$$

$$2\, Ln(n) - \sum_{i=1}^{p} b_i\, n^{\alpha_i} \sim -\, b_1\, n^{\alpha_1}$$

donc :

$$\lim_{n\to+\infty} 2\, Ln(n) - \sum_{i=1}^{p} b_i\, n^{\alpha_i} = \lim_{n\to+\infty} -b_1\, n^{\alpha_1} = -\infty$$

d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} n^2 \, e^{-\sum_{i=1}^{p} b_i \, n^{\alpha_i}} = 0$$