Considérons, pour $\alpha \in \left]0;1\right[$ la suite U définie par :

$$\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N} :\ \boldsymbol{U_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{k^\alpha}} - \int_1^n \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{x^\alpha}}\, \boldsymbol{dx}$$

Montrer que U_n converge en exprimant cette suite comme une série.

<u>Solution</u> :

Transformons tout d'abord l'intégrale avant de la mettre sous forme d'une série télescopique :

$$\int_1^n \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^n = \frac{1}{1-\alpha}\,(n^{1-\alpha}-1)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\alpha}\,(k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha})$$

On en déduit :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\,(k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha})\right)$$

Faisons alors un développement limité du terme général de cette série :

$$V_k = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\,(k^{1-\alpha}-(k-1)^{1-\alpha}) = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1-\left(\frac{k-1}{k}\right)^{1-\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{k^\alpha} - \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1-\left(1-\frac{1}{k}\right)^{1-\alpha}\right)$$

On utilise le développement limité en 0 de :

$$(1+x)^\beta = 1 + \beta\, x + \frac{\beta\,(\beta-1)}{2}\, x^2 + o(x^2)$$

$$V_k = \frac{1}{k^\alpha} - \frac{k^{1-\alpha}}{1-\alpha}\left(1-\left(1-\frac{(1-\alpha)}{k}+\frac{(1-\alpha)(-\alpha)}{2\,k^2}+o\left(\frac{1}{k^2}\right)\right)\right)$$

$$= \frac{1}{k^\alpha} - k^{-\alpha} - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2\,k^{1+\alpha}} + o\left(\frac{1}{k^{1+\alpha}}\right)$$

$$= -\frac{\alpha(1-\alpha)}{2\,k^{1+\alpha}} + o\left(\frac{1}{k^{1+\alpha}}\right) \sim -\frac{\alpha(1-\alpha)}{2\,k^{1+\alpha}}$$

La série de terme général V_k est donc convergente donc U_n converge