

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence R des séries entières suivantes et calculer leur somme sur $]-R, R[$

$$1) \sum_{n \geq 1} (-1)^{1+2+\dots+n} x^n \quad 2) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!} x^{2n} \quad 3) \sum_{n \geq 1} \frac{7^{(-1)^{n+1}}}{n} x^n$$

$$4) \sum_{n \geq 1} a_n x^n, a_n = \text{reste de la division euclidienne de } n \text{ par } 3$$

Exercice 2 : Calculer les sommes suivantes : (on pourra s'aider d'une série entière)

$$1) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{\pi^n} \quad 2) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n (n+1)(n+2)}$$

Correction :

Exercice 1 :

1) Pour, le rayon, on applique la règle de D'Alembert :

Posons :

$$a_n = (-1)^{1+2+\dots+n}$$

alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 1$$

Donc :

$$R = \frac{1}{1} = 1$$

L'analyse des premiers termes de la suite a_n suggère qu'elle est périodique de période 4. En effet :

$$a_1 = (-1)^1 = -1$$

$$a_2 = (-1)^{1+2} = -1$$

$$a_3 = (-1)^{1+2+3} = 1$$

$$a_4 = (-1)^{1+2+3+4} = 1$$

$$a_5 = (-1)^{1+2+3+4+5} = -1, \text{ etc}$$

Vérifions le, en effectuant la division euclidienne d'un entier n par 4 :

$$n = 4q + r, \quad 0 \leq r \leq 3$$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(4q+r)(4q+r+1)}{2} = 2q(4q+r+1) + 2qr + \frac{r(r+1)}{2}$$

$$a_n = (-1)^{\frac{r(r+1)}{2}}$$

Donc :

$$a_{4q} = 1$$

$$a_{4q+1} = -1$$

$$a_{4q+2} = -1$$

$$a_{4q+3} = 1$$

Et on peut effectuer la somme en groupant les termes par termes consécutifs :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{q=1}^{+\infty} a_{4q} x^{4q} + \sum_{q=0}^{+\infty} (a_{4q+1} x^{4q+1} + a_{4q+2} x^{4q+2} + a_{4q+3} x^{4q+3}) \\ &= \sum_{q=1}^{+\infty} x^{4q} + \sum_{q=0}^{+\infty} (-x^{4q+1} - x^{4q+2} + x^{4q+3}) \\ &= -1 + \sum_{q=0}^{+\infty} (x^{4q} - x^{4q+1} - x^{4q+2} + x^{4q+3}) \\ &= -1 + \sum_{q=0}^{+\infty} x^{4q} (1 - x - x^2 + x^3) = -1 + (1 - x - x^2 + x^3) \sum_{q=0}^{+\infty} (x^4)^q \\ &= -1 + (1 - x - x^2 + x^3) \frac{1}{1 - x^4} = \frac{x^4 - 1 + 1 - x - x^2 + x^3}{1 - x^4} \\ &= \frac{x^4 - x^2 + x^3 - x}{(1 - x^2)(1 + x^2)} = \frac{x^2(x^2 - 1) + x(x^2 - 1)}{(1 - x^2)(1 + x^2)} \\ &= -\frac{x^2 + x}{1 - x^2} \end{aligned}$$

2) Posons là encore :

$$a_n = \frac{n^2}{n!}$$

Alors :

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!} \frac{n!}{n^2} \sim \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = 0^+$$

Et la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$ a pour rayon :

$$R = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Il en va donc de même pour la série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n}$

Calcul de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^{2n} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n-1)!} (x^2)^n = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1+1}{(n-1)!} (x^2)^n \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-1}{(n-1)!} (x^2)^n + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} (x^2)^n \\
&= x^4 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} (x^2)^{n-2} + x^2 \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} (x^2)^{n-1} \\
&= x^4 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n + x^2 \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} (x^2)^n \\
&= (x^4 + x^2) e^{x^2}
\end{aligned}$$

3) La règle de D'alembert ne s'applique pas car en posant :

$$a_n = \frac{7(-1)^{n+1}}{n}$$

On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \right| = 49$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{2n+2}}{a_{2n+1}} \right| = \frac{1}{49}$$

Donc la suite $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ n'a pas de limite. En revanche :

Si $|x| > 1$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{7(-1)^{2n+1}}{2n} x^{2n} \right| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|x|^{2n}}{14n} = +\infty$$

La série diverge trivialement.

Si $|x| < 1$:

$$\left| \frac{7(-1)^{n+1}}{n} x^n \right| \leq \frac{7|x|^n}{n} \leq 7|x|^n$$

La série est alors par comparaison absolument convergente.

On en déduit :

$$R = 1$$

Calcul de la somme :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{7(-1)^{2q+1}}{2q} x^{2q} + \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{7(-1)^{2q+2}}{2q+1} x^{2q+1}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{14} \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{(x^2)^q}{q} + 7 \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{x^{2q+1}}{2q+1} \\
&= -\frac{1}{14} \ln(1-x^2) + \frac{7}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)
\end{aligned}$$

4) Comme précédemment :

Si $|x| > 1$: la série diverge trivialement

Si $|x| < 1$:

$$|a_n x^n| \leq 2 |x|^n$$

La série est alors par comparaison absolument convergente.

On en déduit :

$$R = 1$$

Calcul de la somme :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= \sum_{q=0}^{+\infty} (0 x^{3q} + 1 x^{3q+1} + 2 x^{3q+2}) \\
&= \sum_{q=0}^{+\infty} x^{3q} (x + 2 x^2) = (x + 2 x^2) \sum_{q=0}^{+\infty} (x^3)^q = \frac{x + 2 x^2}{1 - x^3}
\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1) Introduisons la série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$$

De rayon de convergence égal à 1 et calculons sa somme :

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1+1)x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n(n-1)x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} n x^n \\
&= x^2 \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} + x \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1} \\
&= x^2 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)'' + x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \right)' \\
&= x^2 \left(\frac{1}{1-x} \right)'' + x \left(\frac{1}{1-x} \right)' \\
&= x^2 \frac{2}{(1-x)^3} + x \frac{1}{(1-x)^2}
\end{aligned}$$

$$= \frac{2x^2 + x(1-x)}{(1-x)^3} = \frac{x^2 + x}{(1-x)^3}$$

La somme cherchée est alors :

$$f\left(\frac{1}{\pi}\right) = \frac{\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{\pi}}{\left(1 - \frac{1}{\pi}\right)^3} = \frac{\pi(1+\pi)}{(\pi-1)^3}$$

2) Introduisons la série :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)} x^n$$

De rayon de convergence égal à 1 et calculons sa somme pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} \right) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^n \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} - \frac{1}{x^2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n+2} x^{n+2} \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \frac{1}{x^2} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \\ &= -\frac{1}{x} \ln(1-x) - \frac{1}{x^2} (-\ln(1-x) - x) \\ &= \frac{(1-x) \ln(1-x) + x}{x^2} \end{aligned}$$

La somme cherchée est alors :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = 2 - 2 \ln(2)$$