On considère, pour tout $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, la suite :

$$\boldsymbol{H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}}$$

Montrer que :

$$\boldsymbol{\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)\,(H_{n+1} - 1)}$$

Réponse :

Première méthode : par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$:

Initialisation : Pour $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{1} H_i = H_1 = \frac{1}{1} = 1$$

$$(1+1)\,(H_{1+1} - 1) = 2\left(1 + \frac{1}{2} - 1\right) = 1$$

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un $n \in \mathbb{N}^*$ c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = (n+1)\,(H_{n+1} - 1)$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^{n+1} H_i = \sum_{i=1}^{n} H_i + H_{n+1} = (n+1)\,(H_{n+1} - 1) + H_{n+1} = (n+2)\,H_{n+1} - (n+1)$$

$$= (n+2)\left(H_{n+2} - \frac{1}{n+2}\right) - (n+1) = (n+2)\,H_{n+2} - 1 - (n+1)$$

$$= (n+2)\,H_{n+2} - (n+2) = (n+2)\,(H_{n+2} - 1)$$

Donc la propriété est vraie pour $n+1$ et donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Deuxième méthode : Sans utiliser un raisonnement par récurrence, qui suppose connaître à l'avance la propriété à montrer.

On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k}$$

Faisons un tableau pour représenter les termes de cette somme, k étant un indice de colonne et i un indice de ligne :

	1	2	3		n
1	1	—			
2	1	$\frac{1}{2}$			
3	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		
⋮	⋮	⋮	⋮	—	
n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{n}$

La somme à calculer est la somme des lignes du tableau. On peut réécrire cette somme comme somme des colonnes du tableau, ce qui donne, en notant que la colonne k contient $n-(k-1)$ valeurs égales à $\frac{1}{k}$:

$$\sum_{i=1}^{n} H_i = \frac{n}{1} + \frac{n-1}{2} + \frac{n-2}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{n-(k-1)}{k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{(n+1)-k}{k} = (n+1) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} 1$$

$$= (n+1)\left(H_{n+1} - \frac{1}{n+1}\right) - n = (n+1)\,H_{n+1} - 1 - n = (n+1)\,H_{n+1} - (n+1)$$

$$= (n+1)\,(H_{n+1} - 1)$$