Soit f une fonction strictement croissante de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telle que $f(2) = 2$ et pour tout couple d'entiers naturels (p, q) on ait $f(p\ q) = f(p)\ f(q)$. Montrer que pour tout entier naturel n on a $f(n) = n$.

Réponse :

Première méthode :

Observons d'abord :

$$f(2) = f(2 \times 1) = f(2) \times f(1) = 2\, f(1)$$

Donc :

$$f(1) = 1$$

$$f(0) = f(0 \times 0) = f(0) \times f(0)$$

Donc :

$$f(0) = 0 \text{ ou } f(0) = 1$$

Or :

$$f(0) < f(1) = 1$$

Donc :

$$f(0) = 0$$

Montrons alors la propriété suivante par récurrence forte sur n :

$$P(n) = \text{"}\forall\, k \in [\![0; n]\!] : f(k) = k\text{"}$$

Initialisation : Elle a déjà été faite pour $n = 2$ car on a montré :

$$f(0) = 0, f(1) = 1 \text{ et par hypothèse } f(2) = 2$$

Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un entier $n \geq 2$, c'est-à-dire :

$$\forall\, k \in [\![0; n]\!] : f(k) = k$$

Distinguons alors deux cas :

1er cas : n est pair, donc $n = 2\, k, k \in [\![1; n]\!]$. Ainsi :

$$f(n) = n = 2\, k$$

$$f(n + 2) = f(2\, k + 2) = f\big(2\, (k + 1)\big) = f(2)\, f(k + 1)$$

Or :

$$k + 1 = n - (k - 1) \in [\![0; n]\!]$$

Ainsi :

$$f(k + 1) = k + 1$$

Et :

$$f(n + 2) = 2\, (k + 1)$$

Or :

$$f(n) < f(n+1) < f(n+2)$$

Donc :

$$2\,k < f(n+1) < 2\,k+2$$

D'où :

$$f(n+1) = 2\,k+1 = n+1$$

2ème cas : n est impair, donc $n = 2\,k+1, k \in [\![1; n]\!]$. Ainsi

$$f(n+1) = f(2\,k+2) = f(2(k+1)) = f(2)\,f(k+1) = 2\,f(k+1)$$

Or :

$$k+1 = n-k \,\epsilon\, [\![0; n]\!]$$

Donc :

$$f(k+1) = k+1$$

Et :

$$f(n+1) = 2\,(k+1) = 2\,k+2 = n+1$$

Donc $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 2$ et donc $f(n) = n$ pour tout entier naturel n.

Deuxième méthode : sans récurrence.

Par récurrence évidente, on a, en plus de $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$ montrés comme précédemment, pour tout entier naturel p :

$$f(2^p) = f(2 \times 2 \times \ldots \times 2) = f(2) \times f(2) \ldots \times f(2) = 2 \times 2 \times \ldots \times 2 = 2^p$$

Or tout entier naturel $n \geq 1$ se situe dans un intervalle de la forme $[\![2^p; 2^{p+1}]\!]$ qui contient $m = 2^{p+1} - 2^p + 1 = 2^p\,(2-1) + 1 = 2^p + 1$ entiers naturels.

f étant strictement croissante, on a également : $f([\![2^p; 2^{p+1}]\!]) \subset [\![f(2^p); f(2^{p+1})]\!] = [\![2^p; 2^{p+1}]\!]$ et $card\big(f([\![2^p; 2^{p+1}]\!])\big) = card([\![2^p; 2^{p+1}]\!])$ donc :

$$f([\![2^p; 2^{p+1}]\!]) = [\![2^p; 2^{p+1}]\!]$$

f étant strictement croissante de $E = [\![2^p; 2^{p+1}]\!]$ dans lui-même réalise une bijection. Elle envoie donc le plus petit élément de E sur lui-même, puis le suivant sur le suivant et ainsi de suite. C'est donc l'identité, soit $f(n) = n$ pour tout n de E.