Montrer que pour toute suite de réels $(u_i)_{1\leq i\leq n}$ strictement positifs :

$$(\boldsymbol{u_1 + u_2 + \cdots + u_n})\left(\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{u_1}} + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{u_2}} + \cdots + \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{u_n}}\right) \geq \boldsymbol{n^2}$$

Réponse :

1ère méthode : On note $P(n)$ cette propriété et on la démontre par récurrence pour $n \geq 1$.

Initialisation : pour $n = 1$:

Soit u_1 un réel strictement positif alors :

$$u_1 \frac{1}{u_1} = 1 \geq 1^2$$

Donc $P(1)$ est vraie.

Hérédité : On suppose $P(n)$ vraie pour un entier naturel $n \geq 1$.

Soit $(u_i)_{1\leq i\leq n+1}$ une suite de $n+1$ réels strictement positifs. Alors :

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1})\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right)$$

$$= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}\right) + (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\frac{1}{u_{n+1}}$$

$$+u_{n+1}\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}\right) + u_{n+1}\frac{1}{u_{n+1}}$$

$$= (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}\right)$$

$$+\left(\frac{u_1}{u_{n+1}} + \frac{u_{n+1}}{u_1}\right) + \left(\frac{u_2}{u_{n+1}} + \frac{u_{n+1}}{u_2}\right) + \cdots + \left(\frac{u_n}{u_{n+1}} + \frac{u_{n+1}}{u_n}\right) + 1$$

Or on a, d'une part, par hypothèse de récurrence :

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)\left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}\right) \geq n^2$$

D'autre part, en notant que chaque terme $\frac{u_i}{u_{n+1}} + \frac{u_{n+1}}{u_i}$ est la somme d'un nombre réel strictement positif et de son inverse, on est amené à étudier sur $]0; +\infty[$ la fonction :

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

de dérivée :

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$$

Or, $f' > 0$ sur $]1; +\infty[$ et $f' < 0$ sur $]0; 1[$ donc f strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ donc f présente un minimum en 1 égal à $f(1) = 2$.

On en déduit pour tout entier naturel $1 \leq i \leq n$:

$$\frac{u_i}{u_{n+1}} + \frac{u_{n+1}}{u_i} \geq 2$$

Les n paires de termes de ce type donnent donc une somme supérieure ou égale à $2\,n$.

Ainsi :

$$(u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}) \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_{n+1}}\right) \geq n^2 + 2\,n + 1 = (n+1)^2$$

Et $P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel $n \geq 1$.

2ème méthode : sans utiliser de récurrence ni d'étude de fonction :

On note d'abord que pour tout réel $x > 0$:

$$x + \frac{1}{x} = \frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2 - 2\,x + 1 + 2\,x}{x} = \frac{(x-1)^2}{x} + 2 \geq 2$$

avec égalité si et seulement si $x = 1$.

Or dans le cas non trivial $n \geq 2$ (le cas $n = 1$ étant l'initialisation de la première méthode) faisons apparaître dans un tableau, les termes du développement de :

$$S_n = (u_1 + u_2 + \cdots + u_n) \left(\frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \cdots + \frac{1}{u_n}\right)$$

	$\frac{1}{u_1}$	$\frac{1}{u_2}$	…	…	$\frac{1}{u_n}$
u_1	1	$\frac{u_1}{u_2}$	…	…	$\frac{u_1}{u_n}$
u_2	$\frac{u_2}{u_1}$	1	…	…	$\frac{u_2}{u_n}$
⋮	⋮				
⋮	⋮				
u_n	$\frac{u_n}{u_1}$	$\frac{u_n}{u_2}$			1

On observe que les n termes de la diagonale sont égaux à 1 et les termes symétriques par rapport à la diagonale sont inverses donc leur somme est supérieure ou égale à 2.

Donc S_n est supérieure ou égale à $n + 2\,m$ où m est le nombre de termes situés sous la diagonale donc $n + 2\,m$ est également le nombre de termes du tableau, à savoir n^2.

A noter que la condition nécessaire et suffisante d'égalité $S_n = n^2$ est que chacune des sommes $\frac{u_i}{u_j} + \frac{u_j}{u_i}$ pour $i \neq j$ soit égale à 2 donc $\frac{u_i}{u_j} = 1$ autrement dit que tous les termes de la suite $(u_i)_{1 \leq i \leq n}$ soient égaux.

Remarque : On peut s'affranchir du tableau, même s'il permet facilement de voir les associations de termes intéressantes, en écrivant :

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{u_i}{u_i} + \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} \left(\frac{u_i}{u_j} + \frac{u_j}{u_i} \right) \ge n + \sum_{1 \le i < j \le n}^{n} 2 = n + 2\, m = n^2$$

3ème méthode : En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

On rappelle que pour deux vecteurs $X = (x_i)_{1 \le i \le n},\ Y = (y_i)_{1 \le i \le n}$ on a :

$$\|X\|_2 \, \|Y\|_2 \ge |\langle X, Y \rangle|$$

avec égalité si et seulement si X et Y sont colinéaires et où $\langle X, Y \rangle$ désigne le produit scalaire euclidien :

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \ y_i$$

Et $\|X\|_2$ la norme associée

$$\|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2}$$

Ainsi en élevant au carré l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \sum_{i=1}^{n} {y_i}^2 \ \ge \left(\sum_{i=1}^{n} x_i \ y_i \right)^2$$

Il suffit de prendre alors :

$$x_i = \sqrt{u_i}, \qquad y_i = \frac{1}{\sqrt{u_i}}$$

Et l'inégalité devient :

$$\sum_{i=1}^{n} u_i \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{u_i} \ge \left(\sum_{i=1}^{n} \sqrt{u_i} \ \frac{1}{\sqrt{u_i}} \right)^2 = n^2$$

avec égalité si et seulement si il existe un réel k tel que pour tout $1 \le i \le n$:

$$\sqrt{u_i} = k \ \frac{1}{\sqrt{u_i}}$$

Soit :

$$u_i = k$$

autrement dit tous les termes u_i égaux.