

Polynômes d'Euler

Enoncé

On considère l'application suivante dans l'espace des polynômes à coefficients réels

$$\Phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$$

$$P(X) \rightarrow \frac{1}{2} (P(X+1) + P(X))$$

- 1) Montrer que Φ est une application linéaire
- 2) Déterminer le terme de plus haut degré de $\Phi(P(X))$ à partir de celui de $P(X)$ et en déduire le noyau de Φ
- 3) En déduire que la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$, le sous espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n , définit un automorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$
- 4) Soit $(E_0(X), E_1(X), \dots, E_n(X))$ la famille de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que :

$$\Phi(E_k(X)) = \frac{1}{k!} X^k$$

Pourquoi cette famille est elle une base de $\mathbb{R}_n[X]$?

- 5) Déterminer $E_0(X)$
- 6) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^* : E_n(0) + E_n(1)$
- 7) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^* : E'_n(X)$ en fonction de $E_{n-1}(X)$
- 8) En déduire $E_1(X), E_2(X), E_3(X), E_4(X), E_5(X)$
- 9) Déterminer pour tout $n \in \mathbb{N}^* E_n(1-X)$ en fonction de $E_n(X)$
- 10) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^* : E_{2n}(0), E_{2n}(1)$ et pour tout $n \in \mathbb{N} : E_{2n+1}(1/2)$
- 11) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}^* : E_{2n}(X)$ n'admet que deux racines distinctes sur $[0, 1]$ à définir et $E_{2n+1}(X)$ n'admet qu'une racine sur le même intervalle
- 12) Etablir le tableau de variations de E_n sur $[0, 1]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$
- 13) Etablir pour tout $n \in \mathbb{N} :$

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^n E_k(0) \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$$

- 14) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N} :$

$$E_{n+1}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{E_k(0)}{(n+1-k)!}$$

- 15) Prouver pour tout $n \in \mathbb{N} :$

$$\frac{1}{n!} \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

16) En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|E_n(0)| \leq 1$$

Solution :

1) Soit $(P(X), Q(X), \alpha) \in \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}$ alors :

$$\begin{aligned} \Phi(P(X) + Q(X)) &= \frac{1}{2} ((P + Q)(X + 1) + (P + Q)(X)) \\ &= \frac{1}{2} (P(X + 1) + P(X)) + \frac{1}{2} (Q(X + 1) + Q(X)) \\ &= \Phi(P(X)) + \Phi(Q(X)) \\ \Phi(\alpha P(X)) &= \frac{1}{2} (\alpha P(X + 1) + \alpha P(X)) \\ &= \alpha \frac{1}{2} (P(X + 1) + P(X)) = \alpha \Phi(P(X)) \end{aligned}$$

Donc Φ est linéaire

2) Posons :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$$

alors :

$$P(X + 1) = a_0 + a_1 (X + 1) + \dots + a_n (X + 1)^n$$

Le terme dominant de $P(X)$ étant $a_n X^n$, celui de $P(X + 1)$ étant également $a_n X^n$ (formule du binôme appliquée à chaque $a_n (X + 1)^n$) on en déduit que $\Phi(P(X))$ a pour terme dominant :

$$\frac{1}{2} (a_n X^n + a_n X^n) = a_n X^n$$

Donc $\Phi(P(X))$ est de même degré que $P(X)$

Déterminons alors le noyau de Φ .

Soit $P(X) \in N(\Phi)$ alors $\Phi(P(X)) = 0$ donc le coefficient dominant de $P(X)$ est nul donc $P(X)$ est le polynôme nul. Réciproquement le polynôme nul est dans le noyau. D'où :

$$N(\Phi) = \{0\}$$

- 3) La remarque précédente montre que la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$. Comme son noyau est réduit au vecteur nul, elle est donc injective et donc surjective. Donc c'est un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$
- 4) Si on note ψ la restriction de Φ à $\mathbb{R}_n[X]$, cette famille est l'image par ψ^{-1} de la famille $\left(\frac{1}{k!} X^k\right)_{0 \leq k \leq n}$ qui est une base de $\mathbb{R}_n[X]$
- 5) Notons $P(X)$ le polynôme constant égal à 1. Alors on a $P(X+1) = 1$ et donc :

$$\frac{1}{2} (P(X+1) + P(X)) = 1 = \frac{1}{0!} X^0$$

Donc :

$$E_0(X) = 1$$

- 6) On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2} (E_n(X+1) + E_n(X)) = \frac{1}{n!} X^n$$

En évaluant cette relation pour $X = 0$ on en déduit :

$$\frac{1}{2} (E_n(1) + E_n(0)) = \frac{1}{n!} 0^n$$

Soit :

$E_n(1) + E_n(0) = 0$

- 7) On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2} (E_n(X+1) + E_n(X)) = \frac{1}{n!} X^n$$

En dérivant cette relation, on obtient :

$$\frac{1}{2} (E'_n(X+1) + E'_n(X)) = \frac{1}{(n-1)!} X^{n-1}$$

Posons :

$$P(X) = E'_n(X)$$

Alors :

$$\frac{1}{2} (P(X+1) + P(X)) = \frac{1}{(n-1)!} X^{n-1}$$

Donc :

$$P(X) = E_{n-1}(X)$$

et ainsi :

$E'_n(X) = E_{n-1}(X)$

8) On a :

$$E'_1(X) = E_0(X) = 1$$

donc :

$$E_1(X) = X + c$$

Or :

$$E_1(1) + E_1(0) = 0$$

donc :

$$1 + c + c = 0$$

Soit :

$$c = -\frac{1}{2}$$

D'où :

$E_1(X) = X - \frac{1}{2}$

On réitère le procédé

$$E_2(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X + c$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} + c + c = 0$$

$$c = 0$$

D'où :

$E_2(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$
--

$$E_3(X) = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + c$$

$$\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + c + c = 0$$

$$c = \frac{1}{24}$$

D'où :

$$E_3(X) = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{24}$$

$$E_4(X) = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X + c$$

$$\frac{1}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{24} + c + c = 0$$

$$c = 0$$

D'où :

$$E_4(X) = \frac{1}{24}X^4 - \frac{1}{12}X^3 + \frac{1}{24}X$$

$$E_5(X) = \frac{1}{120}X^5 - \frac{1}{48}X^4 + \frac{1}{48}X^2 + c$$

$$\frac{1}{120} - \frac{1}{48} + \frac{1}{48} + c + c = 0$$

$$c = -\frac{1}{240}$$

D'où :

$$E_5(X) = \frac{1}{120}X^5 - \frac{1}{48}X^4 + \frac{1}{48}X^2 - \frac{1}{240}$$

9) On a pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{2} (E_n(X+1) + E_n(X)) = \frac{1}{n!} X^n$$

En changeant X en $-X$ dans cette relation, on obtient :

$$\frac{1}{2} (E_n(-X+1) + E_n(-X)) = \frac{1}{n!} (-1)^n X^n$$

Soit :

$$\frac{1}{2} \left((-1)^n E_n(1-X) + (-1)^n E_n(1-(X+1)) \right) = \frac{1}{n!} X^n$$

Posons :

$$P(X) = (-1)^n E_n(1-X)$$

Alors :

$$\frac{1}{2} (P(X) + P(X+1)) = \frac{1}{n!} X^n$$

Donc :

$$P(X) = E_n(X)$$

et ainsi :

$$E_n(X) = (-1)^n E_n(1-X)$$

ou encore :

$E_n(1-X) = (-1)^n E_n(X)$

10) On a, d'une part, d'après ce qui précède évalué en 0 :

$$E_{2n}(1) = (-1)^{2n} E_{2n}(0)$$

Soit :

$$E_{2n}(1) = E_{2n}(0)$$

d'autre part :

$$E_{2n}(1) + E_{2n}(0) = 0$$

On en déduit :

$E_{2n}(1) = E_{2n}(0) = 0$

De plus pour $n \in \mathbb{N}$:

$$E_{2n+1}(1-X) = (-1)^{2n+1} E_{2n+1}(X)$$

Donc, évalué en $1/2$:

$$E_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -E_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Soit :

$$E_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

11) Définissons pour $n \in \mathbb{N}^*$ le prédicat suivant Q_n :

« $E_{2n}(X)$ n'admet que 0 et 1 pour racines distinctes sur $[0,1]$ et $E_{2n+1}(X)$ n'admet que $\frac{1}{2}$ pour racine sur le même intervalle »

Montrons que Q_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par récurrence.

Initialisation : pour $n = 1$

$$E_2(X) = \frac{1}{2}X^2 - \frac{1}{2}X$$

$$E_3(X) = \frac{1}{6}X^3 - \frac{1}{4}X^2 + \frac{1}{24}$$

$E_2(X)$ admet 0 et 1 pour racines distinctes sur $[0,1]$ et ce sont les seules car il est du second degré.

$$E'_3(X) = E_2(X)$$

On en déduit que la fonction polynomiale $E'_3(x)$ a un signe strictement négatif sur $]0,1[$ donc que $E_3(x)$ est strictement décroissante sur $[0,1]$. Ainsi, $E_3(x)$ s'annulant en $\frac{1}{2}$ ne s'annule qu'en cette valeur sur $[0,1]$ et Q_1 est vraie

Hérédité : Supposons que Q_n soit vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ alors on a :

$$E'_{2n+2}(X) = E_{2n+1}(X)$$

Supposons par l'absurde que E_{2n+2} s'annule en une valeur $a \in]0,1[$. E_{2n+2} s'annulant en 0, d'après le lemme de Rolle $E'_{2n+2} = E_{2n+1}$ s'annule en une valeur $c \in]0, a[$ donc :

$$c = \frac{1}{2}$$

et donc :

$$a \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[$$

Or E_{2n+2} s'annulant en 1, d'après le lemme de Rolle $E'_{2n+2} = E_{2n+1}$ s'annule en une valeur $c' \in]a, 1[$ ce qui est absurde car E_{2n+1} ne s'annule qu'en $\frac{1}{2}$

On en déduit que E_{2n+2} n'admet que 0 et 1 pour racines distinctes sur $[0,1]$

Passons à E_{2n+3} en supposant par l'absurde qu'il s'annule en une valeur $a \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$. E_{2n+3} s'annulant en $\frac{1}{2}$ et en a , d'après le lemme de Rolle $E'_{2n+3} = E_{2n+4}$ s'annule en une valeur $c \in \left]a, \frac{1}{2}\right[$ ce qui est absurde. Il en va de même en supposant que E_{2n+3} s'annule en une valeur $a \in \left]\frac{1}{2}, 1\right]$. Donc E_{2n+3} a pour unique racine $\frac{1}{2}$ sur $[0,1]$ ce qui achève de montrer que Q_{n+1} est vraie.

12) On constate, au vu des premières fonctions polynômes, la chose suivante :

$$E_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

Donc E_1 est strictement croissante sur $[0,1]$. Du signe de $E'_2 = E_1$ on en déduit que E_2 est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ puis que $E'_3 = E_2$ est strictement négative sur $]0,1[$. On en déduit que E_3 est strictement décroissante sur $[0,1]$ et comme elle s'annule en $\frac{1}{2}$ par son signe, que E_4 est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Cela donne l'idée de montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété T_n suivante :

« E_{4n} est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tandis que E_{4n-1} est strictement décroissante sur $[0,1]$.

 E_{4n-2} est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ tandis que E_{4n-3} est strictement croissante sur $[0,1]$ »

Initialisation : pour $n = 1$

C'est déjà fait

Hérédité : Supposons que T_n soit vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$ alors on a :

$$E'_{4n+1} = E_{4n}$$

Par hypothèse, E_{4n} est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, et d'autre part s'annule en 0 et en 1. On en déduit qu'elle est strictement positive sur $]0,1[$ et donc que E_{4n+1} est strictement croissante sur $[0,1]$. On raisonne de façon analogue à l'initialisation pour en déduire que E_{4n+2} est

strictement décroissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ puis que E_{4n+3} est strictement décroissante sur $[0, 1]$ et enfin E_{4n+4} est strictement croissante sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ce qui prouve l'hérédité.

13) Montrons la propriété par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

Initialisation : pour $n = 0$

$$E_0(X) = \sum_{k=0}^0 E_k(0) \frac{X^{0-k}}{(0-k)!}$$

C'est vérifié

Hérédité : Supposons que l'on ait pour $n \in \mathbb{N}$:

$$E_n(X) = \sum_{k=0}^n E_k(0) \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$$

Alors :

$$E'_{n+1}(X) = E_n(X) = \sum_{k=0}^n E_k(0) \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$$

Donc, par intégration :

$$E_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^n E_k(0) \frac{X^{n+1-k}}{(n+1-k)!} + c$$

Et en faisant $X = 0$ on obtient :

$$E_{n+1}(0) = c$$

Donc :

$$E_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^n E_k(0) \frac{X^{n+1-k}}{(n+1-k)!} + E_{n+1}(0) \frac{X^{n+1-(n+1)}}{(n+1-(n+1))!}$$

Soit :

$$E_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n+1} E_k(0) \frac{X^{n+1-k}}{(n+1-k)!}$$

Donc la propriété est héréditaire.

14) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$E_{n+1}(0) + E_{n+1}(1) = 0$$

Donc :

$$E_{n+1}(0) + \sum_{k=0}^{n+1} E_k(0) \frac{1}{(n+1-k)!} = 0$$

Soit :

$$2 E_{n+1}(0) + \sum_{k=0}^n E_k(0) \frac{1}{(n+1-k)!} = 0$$

D'où :

$$E_{n+1}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{E_k(0)}{(n+1-k)!}$$

15) Pour $n = 0$ et $n = 1$ la propriété se vérifie aisément. Pour $n \geq 2$ il suffit de noter que l'on a :

$$\frac{2^{n-1}}{n!} = \frac{2}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{2}{n} \leq 1 \times 1 \times \dots \times 1 = 1$$

16) On démontre la propriété par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}$:

Initialisation : pour $n = 0$

$$|E_0(0)| = 1 \leq 1$$

Donc c'est vrai

Hérédité : Supposons que l'on ait pour $n \in \mathbb{N}$ et tout $0 \leq k \leq n$: $|E_k(0)| \leq 1$ alors

$$E_{n+1}(0) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{E_k(0)}{(n+1-k)!}$$

Donc :

$$|E_{n+1}(0)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{|E_k(0)|}{(n+1-k)!}$$

Soit :

$$|E_{n+1}(0)| \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(n+1-k)!} \leq \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{n+1-k}} \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

Donc la propriété est héréditaire