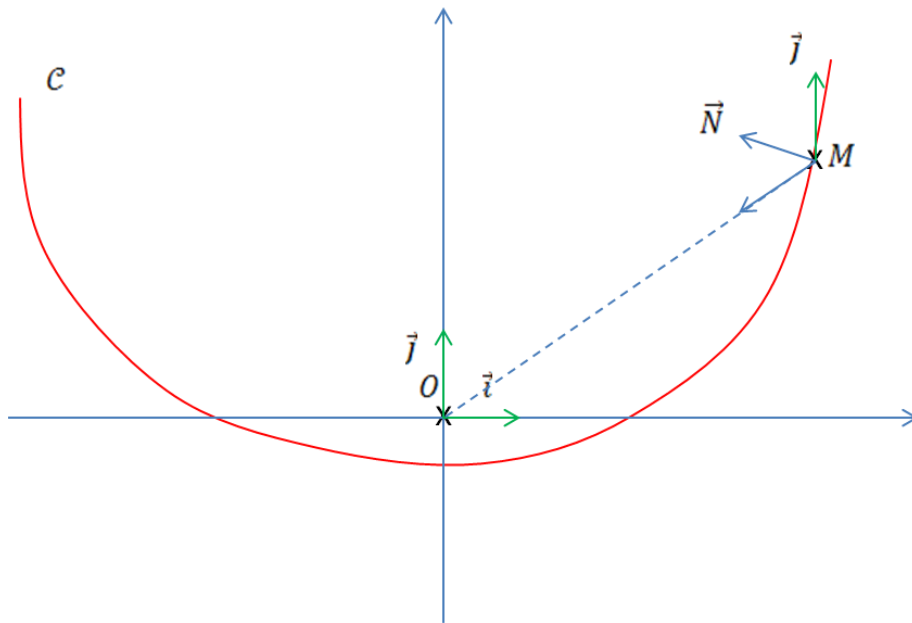


Montrer que les paraboles sont les seules courbes ayant la propriété de concentrer un faisceau incident de rayons parallèles en un foyer.

Solution :

Soit un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et une courbe plane $\mathcal{C}$ convexe telle qu'un faisceau de rayons incidents se déplaçant selon le vecteur $-\vec{j}$ converge vers O .



Soit $M(x, f(x))$ un point de cette courbe d'équation $y = f(x)$ et tel que $x > 0$

La tangente au point M admet alors pour vecteur directeur

$$\vec{T} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

et un vecteur normal

$$\vec{N} \begin{pmatrix} -f'(x) \\ 1 \end{pmatrix}$$

On a alors pour tout $x \in D_f$:

$$\vec{N} \cdot \vec{j} = \frac{\overrightarrow{MO}}{MO} \cdot \vec{N}$$

Soit :

$$1 = \frac{x f'(x) - f(x)}{\sqrt{x^2 + f(x)^2}}$$

Posons alors pour $x \neq 0$:

$$g(x) = \frac{f(x)}{x}$$

Alors :

$$f'(x) = g(x) + x g'(x)$$

et :

$$1 = \frac{x g(x) + x^2 g'(x) - x g(x)}{\sqrt{x^2 + x^2 g(x)^2}}$$

$$1 = \frac{x^2 g'(x)}{x \sqrt{1 + g(x)^2}}$$

$$\frac{g'(x)}{\sqrt{1 + g(x)^2}} = \frac{1}{x}$$

$$\operatorname{sh}^{-1}(g(x)) = \operatorname{Ln}(x) + c$$

$$g(x) = \operatorname{sh}(\operatorname{Ln}(x) + c) = \frac{1}{2} (e^{\operatorname{Ln}(x)+c} + e^{-\operatorname{Ln}(x)-c})$$

$$= \frac{1}{2} \left(e^c x + \frac{1}{e^c x} \right)$$

Soit en posant : $k = e^c$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(k x^2 + \frac{1}{k} \right)$$

Autrement dit la portion de courbe située dans le demi plan $x > 0$ doit être une parabole d'axe de symétrie $(O, \vec{j})$ et par symétrie, il en est de même pour celle située dans le demi plan $x < 0$