

Tous ces exercices sont traités dans une forme plus générale dans le fichier cours associé. Il s'agit ici de retrouver ces résultats de façon plus élémentaire.

Exercice 1

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et P un polynôme à coefficients réels (ou complexes) vérifiant :

$$\forall x \in J : P(x) = 0$$

Montrer, par récurrence sur le degré de P que P est le polynôme nul (tous ses coefficients sont nuls)

Exercice 2

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ deux n – uplets de réels, tous distincts pour le second et tels que :

$$\forall x \in J : a_1 e^{k_1 x} + a_2 e^{k_2 x} + \dots + a_n e^{k_n x} = 0$$

Montrer, par récurrence sur n que l'on a :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0$$

Exercice 3

Soit J un intervalle de $\mathbb{R}$ non réduit à un point et $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n)$, $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ trois n – uplets de réels, tous distincts pour le troisième et tels que :

$$\begin{aligned} \forall x \in J : a_1 \cos(k_1 x) + a_2 \cos(k_2 x) + \dots + a_n \cos(k_n x) + \\ b_1 \sin(k_1 x) + b_2 \sin(k_2 x) + \dots + b_n \sin(k_n x) = 0 \end{aligned}$$

Montrer, par récurrence sur n que l'on a :

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = b_1 = b_2 = \dots = b_n = 0$$