

PROBLEME I : Autour des séries de fonctions

On rappelle que $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

PARTIE I : Etude d'une fonction définie par la somme d'une série

On considère la fonction F donnée par : $F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right)$.

1. Définition de la fonction F

1.a) Montrer que l'ensemble de définition de F est $\mathbb{R} \setminus \{-n | n \in \mathbb{N}^*\}$

1.b) Calculer $F(0)$, $F(1)$, $F(2)$

Dans la suite on étudie la fonction F uniquement sur $\mathbb{R}^+$

2. Continuité de F sur $\mathbb{R}^+$.

2.a) Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}^+$

2.b) Etablir que : $\forall (x, y) \in [0, +\infty[^2, F(y) - F(x) = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$.

En déduire que sur $\mathbb{R}^+$, F est $\frac{\pi^2}{6}$ -lipschitzienne.

3. Dérivabilité de F

3.a) Prouver que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$ et donner, pour tout $x \geq 0$, la valeur de $F'(x)$ sous forme de somme d'une série. Préciser les valeurs de $F'(0)$ et $F'(1)$.

3.b) Montrer que, sur $\mathbb{R}^+$, F est une fonction croissante et concave.

Retrouver le fait que sur $\mathbb{R}^+$, F est $\frac{\pi^2}{6}$ -lipschitzienne.

4. Limite de F au voisinage de $+\infty$

4.a) On suppose F majorée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}^+, \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x} \right) \leq M$

En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \leq M$. Conclure.

4.b) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$

5. Equivalent de F au voisinage de $+\infty$.

Pour $x \in]0, +\infty[$, on pose φ_x la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $\forall t \in [1, +\infty[, \varphi_x(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{x+t}$

5.a) Calculer, pour $y > 1$, $J_x(y) = \int_1^y \varphi_x(t) dt$ puis $\ell(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} J_x(y)$.

5.b) Prouver que $\forall n \geq 1, \varphi_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(n)$

En déduire que : $\ell(x) \leq F(x) \leq 1 + \ell(x)$

5.c) Conclure que, lorsque x tend vers $+\infty$, $F(x) \sim \ln(x)$

PARTIE II : Etude d'équations fonctionnelles

1. Soit a un réel quelconque. On se propose de prouver qu'il existe une unique fonction f_a , définie sur $]0, +\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

$$C_1(a) : \begin{cases} \forall x > 0, f_a(x+1) - f_a(x) = \frac{1}{x} \\ f_a(1) = a \\ f_a \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

- 1.a) On suppose que deux fonctions g et h définies sur $\mathbb{R}_+^*$ sont solutions de $C_1(a)$ et on pose $\delta = g - h$.
Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \delta(x+1) = \delta(x)$ et préciser la valeur de $\delta(n)$ pour tout entier n non nul.
- 1.b) Montrer que : $\forall x \in]0, 1], \forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} \leq \delta(x+n) \leq \frac{1}{n}$. En déduire que :

$$\forall x > 0, g(x) = h(x)$$

- 1.c) Montrer que l'unique solution de $C_1(a)$ est la fonction f_a définie par :

$$\forall x > 0, f_a(x) = a - \frac{1}{x} + F(x)$$

où F est la fonction étudiée dans la deuxième partie.

2. On se propose de prouver qu'il existe une unique fonction g , dérivable sur $]0, +\infty[$ vérifiant les conditions suivantes :

$$C_2 : \begin{cases} \forall x > 0, g(x+1) - g(x) = \ln(x) \\ g(1) = 0 \\ g' \text{ est croissante sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

- 2.a) On suppose que g est solution de C_2

i. Montrer que g' est solution de $C_1(\alpha)$ avec $\alpha = g'(1)$

ii. Calculer $g(2) - g(1)$ de deux manières afin de montrer que $\alpha = -\int_1^2 f_0(t)dt$ où f_0 est la solution de $C_1(0)$

iii. Montrer que : $\forall x > 0, g(x) = \alpha(x-1) + \int_1^x f_0(t)dt$

- 2.b) Montrer que C_2 admet une unique solution.

2.c) Montrer que pour tout réel $x > 0$, la série $\sum_{n>0} \left(x \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln \left(\frac{x+n}{n} \right) \right)$ est convergente.

- 2.d) Prouver que l'unique solution de C_2 est donnée par :

$$\forall x > 0, g(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x \ln \left(\frac{n+1}{n} \right) - \ln \left(\frac{x+n}{n} \right) \right)$$

3. On se propose de prouver qu'il existe une unique fonction h , dérivable sur $]0, +\infty[$, à valeurs strictement positives vérifiant les conditions suivantes :

$$C_3 : \begin{cases} \forall x > 0, h(x+1) = x h(x) \\ h(1) = 1 \\ \ln \circ h \text{ est convexe sur } \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

- 3.a) Prouver l'existence et l'unicité de h et l'exprimer en fonction de g

- 3.b) Calculer la valeur de $h(p)$ pour tout entier naturel non nul p .

3.c) On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, $v_n(x) = \frac{(n+1)^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)}$. Montrer que la suite de fonctions $(v_n)_{n>0}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers h .

3.d) Exprimer $v_n \left(\frac{1}{2} \right)$ en fonction du coefficient binomial $\binom{2n}{n}$ et en déduire la valeur de $h \left(\frac{1}{2} \right)$

Cette fonction h est en fait la fonction Γ appelée fonction gamma d'Euler et dont l'une des propriétés fondamentales est d'extrapoler la suite factorielle.

Correction

Partie I

1 a) soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$ alors si $x \neq 0$ et en $+\infty$ pour n :

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \sim \frac{x}{n^2}$$

Donc la série de fonction associée converge et $F(x)$ est définie. En outre :

$$F(0) = 0$$

Si $x = -m$, $m \in \mathbb{N}$ le terme de rang m de la série n'est pas défini donc $F(x)$ n'est pas définie.

Ainsi :

$$D_F = \mathbb{R} \setminus \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

1 b)

$$F(0) = 0$$

$$F(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = 1$$

$$F(2) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2} \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} \right) - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} \right) \right) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

2 a) Posons :

$$f_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}$$

sur $[a, b] \subset [0, +\infty[$:

$$|f_n(x)| = \left| \frac{x}{n(n+x)} \right| \leq \frac{|x|}{n^2} \leq \frac{b}{n^2}$$

La série de terme général $\frac{b}{n^2}$ étant convergente, la série de fonctions de terme général $f_n(x)$ est donc normalement convergente et donc uniformément convergente sur $[a, b]$. Comme chaque terme est une fonction continue sur $[a, b]$, la limite uniforme $F(x)$ est donc continue sur $[a, b]$.

2 b) soit $(x, y) \in [0, +\infty[^2$ alors :

$$F(y) - F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+y} \right) - \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y-x}{(n+x)(n+y)} =$$
$$(y-x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)}$$

Donc :

$$|F(y) - F(x)| = (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)(n+y)} \leq (y - x) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = (y - x) \frac{\pi^2}{6}$$

3 a) les $f_n(x)$ sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et :

$$f'_n(x) = \frac{1}{(n+x)^2}$$

Donc sur $[0, +\infty[$:

$$|f'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}$$

La série de terme général $f'_n(x)$ converge donc normalement sur $[0, +\infty[$. On peut donc dériver $F(x)$ sur $[0, +\infty[$ terme à terme :

$$F'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+x)^2}$$

On en déduit :

$$F'(0) = \frac{\pi^2}{6}$$

$$F'(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1$$

3 b) On a sur $[0, +\infty[$: $F'(x) \geq 0$ donc F est croissante sur $[0, +\infty[$.

les $f'_n(x)$ sont dérivables sur $[0, +\infty[$ et :

$$f''_n(x) = -\frac{2}{(n+x)^3}$$

Donc sur $[0, +\infty[$:

$$|f''_n(x)| \leq \frac{2}{n^3}$$

La série de terme général $f''_n(x)$ converge donc normalement sur $[0, +\infty[$. On peut donc dériver $F'(x)$ sur $[0, +\infty[$ terme à terme :

$$F''(x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{(n+x)^3} \leq 0$$

F est donc concave sur $[0, +\infty[$

4) Supposons :

$$\exists M \in]0, +\infty[: \forall x \in [0, +\infty[: \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \leq M$$

Alors :

$$\forall N \in \mathbb{N}^* : \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} \right) \leq M$$

Et, en faisant tendre x vers $+\infty$, à N fixé, on obtient par passage à la limite dans l'inégalité :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n} \leq M$$

Or :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} = +\infty$$

Ceci apporte une contradiction. Donc F est donc croissante et non majorée sur $[0, +\infty[$ donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = +\infty$$

5 a)

$$J_x(y) = \int_1^y \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = \left[\ln \left(\frac{t}{t+x} \right) \right]_1^y = \ln \left(\frac{y}{y+x} \right) - \ln \left(\frac{1}{1+x} \right)$$

On en déduit :

$$l(x) = \int_1^x \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} \right) dt = -\ln \left(\frac{1}{1+x} \right) = \ln(x+1)$$

5 b) on a sur $[n, n+1]$:

$$\varphi_x(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+x} = \frac{x}{t(t+x)}$$

qui est une fonction décroissante de t à x fixé, donc, sur $[n, n+1]$:

$$\varphi_x(n+1) \leq \varphi_x(t) \leq \varphi_x(n)$$

D'où :

$$\int_n^{n+1} \varphi_x(n+1) dt \leq \int_n^{n+1} \varphi_x(t) dt \leq \int_n^{n+1} \varphi_x(n) dt$$

Soit :

$$\varphi_x(n+1) \leq \int_n^{n+1} \varphi_x(t) dt \leq \varphi_x(n)$$

En sommant de 1 à $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^N \varphi_x(n+1) \leq \sum_{n=1}^N \int_n^{n+1} \varphi_x(t) dt \leq \sum_{n=1}^N \varphi_x(n)$$

Puis en faisant tendre N vers l'infini :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_x(n+1) \leq \int_1^{+\infty} \varphi_x(t) dt \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \varphi_x(n)$$

$$F(x) - \left(1 - \frac{1}{x}\right) \leq l(x) \leq F(x)$$

Soit :

$$F(x) \leq l(x) + 1 - \frac{1}{x} \leq l(x) + 1$$

Ainsi :

$$l(x) \leq F(x) \leq l(x) + 1$$

5 c)

$$\ln(x+1) \leq F(x) \leq \ln(x+1) + 1$$

Et pour $x > 1$:

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \leq \frac{F(x)}{\ln(x)} \leq \frac{\ln(x+1) + 1}{\ln(x)}$$

Or en $+\infty$:

$$\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \sim \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = 1, \quad \frac{\ln(x+1) + 1}{\ln(x)} \sim \frac{\ln(x)}{\ln(x)} = 1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{\ln(x)} = 1$$

Ainsi :

$$F(x) \sim \ln(x)$$

Partie II :

1 a) Soient g et h deux solutions de $\mathcal{C}_1(a)$ et $\delta = g - h$. Alors :

$$\forall x \in]0, +\infty[: \delta(x+1) - \delta(x) = (g(x+1) - g(x)) - (h(x+1) - h(x)) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x} = 0$$

Donc :

$$\delta(x+1) = \delta(x)$$

Il en découle :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : \delta(n+1) = \delta(n)$$

La suite $(\delta(n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc la suite constante de valeur $\delta(1) = 0$

1 b) Soit $x \in]0, 1[$ alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : x + n \in]n, n+1[$$

Donc :

$$\begin{aligned}g(n) &\leq g(x+n) \leq g(n+1) \\ -h(n+1) &\leq -h(x+n) \leq -h(n)\end{aligned}$$

D'où :

$$g(n) - h(n+1) \leq g(x+n) - h(x+n) \leq g(n+1) - h(n)$$

Soit :

$$h(n) - h(n+1) \leq g(x+n) - h(x+n) \leq g(n+1) - g(n)$$

finalement :

$$-\frac{1}{n} \leq \delta(x+n) \leq \frac{1}{n}$$

Or :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \delta(x+n+1) = \delta(x+n)$$

La suite $(\delta(x+n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc la suite constante de valeur $\delta(x)$

Ainsi, sur $]0,1[$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^* : -\frac{1}{n} \leq \delta(x) \leq \frac{1}{n}$$

Donc :

$$\delta(x) = 0$$

Or pour $x \in]0,1[$: $\delta(x+n) = \delta(x) = 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

pour $x \in]n, n+1[$: $\delta(x) = 0$

Or :

$$]0, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]n, n+1[$$

On en déduit :

$$\forall x \in]0, +\infty[: \delta(x) = 0$$

1 c) Posons :

$$f_a(x) = a - \frac{1}{x} + F(x)$$

D'une part, f_a est croissante sur $]0, +\infty[$

D'autre part :

$$\forall x \in]0, +\infty[: f_a(x+1) - f_a(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + F(x+1) - F(x)$$

$$= \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+x+1} \right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{1+x} = \frac{1}{x}$$

Enfin :

$$f_a(1) = a - 1 + F(1) = a$$

f_a est donc solution de $\mathcal{C}_1(a)$, c'est donc l'unique solution.

2 a)

i) Soit g solution de $\mathcal{C}_2$ alors :

D'une part :

$$\forall x \in]0, +\infty[: g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x}$$

D'autre part :

$$g' \text{ croissante sur }]0, +\infty[$$

Donc g' est solution de $\mathcal{C}_1(\alpha)$ où $\alpha = g'(1)$

ii) On a d'une part :

$$g(2) - g(1) = \ln(1) = 0$$

D'autre part :

$$g(2) - g(1) = \int_1^2 g'(x) dx = \int_1^2 \left(\alpha - \frac{1}{x} + F(x) \right) dx = \alpha - \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - F(x) \right) dx$$

On en déduit :

$$\alpha = \int_1^2 \left(\frac{1}{x} - F(x) \right) dx = - \int_1^2 f_0(x) dx$$

iii) On a :

$$\forall x \in]0, +\infty[: g'(x) = \alpha - \frac{1}{x} + F(x) = \alpha + f_0(x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \int_1^x g'(t) dt &= \int_1^x (\alpha + f_0(t)) dt \\ g(x) - g(1) &= \alpha (x - 1) + \int_1^x f_0(t) dt \end{aligned}$$

D'où :

$$g(x) = \alpha (x - 1) + \int_1^x f_0(t) dt$$

2 b) On considère sur $]0, +\infty[:$

$$g(x) = -(x-1) \int_1^2 f_0(x) dx + \int_1^x f_0(t) dt$$

On a :

g est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$g(1) = 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[: g'(x) = - \int_1^2 f_0(x) dx + f_0(x), g''(x) = f_0'(x) = \frac{1}{x^2} + F'(x) \geq 0$$

g' est donc croissante sur $]0, +\infty[$

$$\forall x \in]0, +\infty[: g'(x+1) - g'(x) = \frac{1}{x}$$

Donc :

$$\int_1^x (g'(t+1) - g'(t)) dx = \ln(x)$$

Soit :

$$(g(x+1) - g(x)) - (g(2) - g(1)) = \ln(x)$$

$$g(x+1) - g(x) = \ln(x)$$

g est donc solution de $\mathcal{C}_2$. C'est donc l'unique solution.

2 c) Soit $x \in]0, +\infty[:$

$$\begin{aligned} x \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) &= x \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) \\ &= x \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) - \left(\frac{x}{n} - \frac{x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= \frac{x - x^2}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

Si $x \neq 1$ alors :

$$x \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) \sim \frac{x - x^2}{2n^2}$$

et la série est absolument convergente

Si $x = 1$ alors :

$$x \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) - \ln\left(\frac{x+n}{n}\right) = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et la série est absolument convergente

2 d) Posons pour $x > 0$:

$$g(x) = -\text{Ln}(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(x \text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \text{Ln}\left(\frac{x+n}{n}\right) \right)$$

Alors

$$g(1) = 0$$

$$\forall x \in]0, +\infty[: g(x+1) - g(x) = \text{Ln}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \text{Ln}\left(\frac{x+1+n}{x+n}\right) \right)$$

$$= \text{Ln}\left(\frac{x}{x+1}\right) + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\text{Ln}\left(\frac{n+1}{x+n+1}\right) - \text{Ln}\left(\frac{n}{x+n}\right) \right)$$

$$= \text{Ln}(x) - \text{Ln}(x+1) - \text{Ln}\left(\frac{1}{x+1}\right) = \text{Ln}(x)$$

Montrons que g est dérivable sur $]0, +\infty[$ en posant :

$$g_n(x) = x \text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \text{Ln}\left(\frac{x+n}{n}\right)$$

Les g_n sont dérivables sur $]0, +\infty[$ et :

$$g'_n(x) = \text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{x+n}$$

Sur $[a, b] \subset]0, +\infty[$:

$$\text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{a+n} \leq g'_n(x) \leq \text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{b+n}$$

Posons :

$$c_n = \text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{a+n}, \quad d_n = \text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{b+n}$$

$$|g'_n(x)| \leq \sup |c_n|, |d_n|$$

Or les séries de terme général c_n et d_n sont absolument convergentes (par développement limité)

Donc la série de fonction de terme général $g'_n(x)$ converge normalement sur $[a, b]$. On peut donc dériver $g(x)$ terme à terme. Ainsi :

$$g'(x) = -\frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\text{Ln}\left(\frac{n+1}{n}\right) - \frac{1}{x+n} \right)$$

Pour des raisons analogues (convergence normale), on peut à nouveau dériver sous le signe somme et :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(x+n)^2} \geq 0$$

g' est donc croissante sur $]0, +\infty[$

g est donc solution de $\mathcal{C}_2$. C'est donc l'unique solution.

3) Posons pour $h > 0$ dérivable : $g_1 = \text{Ln}(h)$

$$\begin{aligned} h \text{ solution de } \mathcal{C}_3 &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x > 0 : h(x+1) = x h(x) \\ h(1) = 1 \\ \text{Ln} \circ h \text{ convexe sur }]0, +\infty[\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x > 0 : \text{Ln}(h(x+1)) = \text{Ln}(x) + \text{Ln}(h(x)) \\ \text{Ln}(h(1)) = 0 \\ \text{Ln} \circ h \text{ convexe sur }]0, +\infty[\end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \forall x > 0 : g_1(x+1) - g_1(x) = \text{Ln}(x) \\ g_1(1) = 0 \\ g_1 \text{ convexe sur }]0, +\infty[\end{cases} \\ &\Leftrightarrow g_1 \text{ solution de } \mathcal{C}_2 \end{aligned}$$

On en déduit l'unique solution de $\mathcal{C}_3$:

$$h(x) = e^{g(x)}$$

3 b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$h(n+1) = n h(n)$$

donc par récurrence :

$$h(n) = (n-1)! h(1) = (n-1)!$$

3 c)

$$\begin{aligned} v_n(x) &= \frac{(n+1)^x n!}{x(x+1) \dots (x+n)} \\ \text{Ln}(v_n(x)) &= x \text{Ln}(n+1) + \sum_{k=1}^n \text{Ln}(k) - \text{Ln}(x) - \sum_{k=1}^n \text{Ln}(x+k) \\ &= -\text{Ln}(x) + \sum_{k=1}^n \left(x \text{Ln}(k+1) - x \text{Ln}(k) - \text{Ln}\left(\frac{x+k}{k}\right) \right) \\ &= -\text{Ln}(x) + \sum_{k=1}^n \left(x \text{Ln}\left(\frac{k+1}{k}\right) - \text{Ln}\left(\frac{x+k}{k}\right) \right) \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Ln}(v_n(x)) = g(x)$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n(x) = e^{g(x)} = h(x)$$

3 d)

$$\begin{aligned}
 v_n\left(\frac{1}{2}\right) &= \frac{(n+1)^{\frac{1}{2}} n!}{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}+1\right) \dots \left(\frac{1}{2}+n\right)} = \frac{2^{n+1} (n+1)^{\frac{1}{2}} n!}{1 \times 3 \times \dots \times (2n+1)} \\
 &= \frac{2 \times 4 \times \dots \times 2n \times 2^{n+1} (n+1)^{\frac{1}{2}} n!}{(2n)! (2n+1)} \\
 &= \frac{2^n n! \times 2^{n+1} (n+1)^{\frac{1}{2}} n!}{(2n)! (2n+1)} \\
 &= \frac{(n!)^2 \times 2^{2n+1} (n+1)^{\frac{1}{2}}}{(2n)! (2n+1)} = \frac{2^{2n+1} (n+1)^{\frac{1}{2}}}{\binom{2n}{n} (2n+1)} \\
 h\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^{2n+1} (n+1)^{\frac{1}{2}}}{\binom{2n}{n} (2n+1)}
 \end{aligned}$$

On rappelle l'équivalent de Stirling :

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}$$

D'où on tire :

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \sim \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \sqrt{2\pi 2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n} 2\pi n} = \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi} \sqrt{n}}$$

Ainsi :

$$\frac{2^{2n+1} (n+1)^{\frac{1}{2}}}{\binom{2n}{n} (2n+1)} \sim \frac{2^{2n+1} \sqrt{n} \sqrt{\pi} \sqrt{n+1}}{2^{2n} 2n} \sim \sqrt{\pi}$$

Donc :

$$h\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$