

Diagonalisation de la transposée d'une matrice

Soit M une matrice carrée d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ et à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique $P_{M^T}(X)$ de la transposée de M en fonction de celui de M noté $P_M(X)$
- 2) Montrer que si M est diagonalisable, alors M^T l'est aussi.

Correction :

- 1) On a :

$$\begin{aligned} P_{M^T}(X) &= \det(M^T - X I_n) = \det((M^T - X I_n)^T) = \det((M^T)^T - (X I_n)^T) = \det(M - X I_n) \\ &= P_M(X) \end{aligned}$$

Donc une matrice carrée a même polynôme caractéristique que sa transposée donc les mêmes valeurs propres. Cela suggère que si l'une est diagonalisable alors l'autre l'est ce que nous allons démontrer en 2)

- 2) Supposons M diagonalisable, alors, en notant $GL_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles d'ordre n et $D_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices diagonales d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$:

$$\exists (P, D) \in GL_n(\mathbb{K}) \times D_n(\mathbb{K}) : M = P^{-1} D P$$

Ainsi :

$$M^T = (P^{-1} D P)^T = P^T D^T (P^{-1})^T = P^T D (P^T)^{-1}$$

Soit en posant $Q = (P^T)^{-1} \in GL_n(\mathbb{K})$:

$$M^T = Q^{-1} D Q$$

M^T est donc diagonalisable et ses sous espaces propres se déduisent de ceux de M , une base de vecteurs propres étant donnée par les colonnes de $(P^T)^{-1}$