

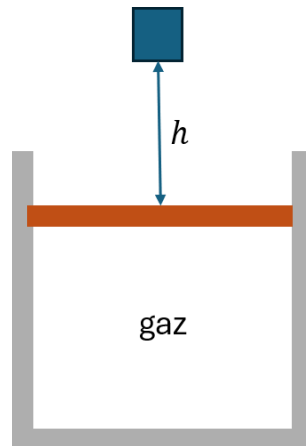
Chute d'une masse sur un piston

Un gaz parfait de coefficient adiabatique γ est enfermé dans une enceinte cylindrique munie d'un piston mobile de surface S , les deux étant athermiques, à une température T_0 , une pression P_0 et un volume V_0 .

On lâche depuis une hauteur h une masse m et on considère que le choc de la masse avec le piston est mou, sans dissipation de chaleur.

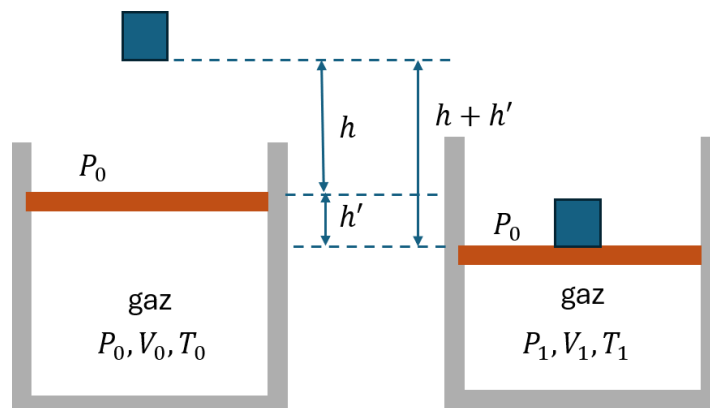
La masse du piston est considérée comme négligeable devant m .

Déterminer la température finale du gaz.



Réponse :

Notons h' la hauteur dont a descendu le piston jusqu'au nouvel équilibre :



Nous pouvons établir quatre relations :

Bilan énergétique par deux méthodes :

1 ère méthode : Premier principe appliqué au gaz :

La masse transfère au piston un travail égal à sa variation d'énergie potentielle de pesanteur :

$$W = m g (h + h')$$

Ce travail est intégralement transféré par le piston au gaz, puisque l'énergie totale du piston n'a pas varié entre état initial et état final (en négligeant sa variation d'énergie potentielle de pesanteur)

L'air ambiant exerce un travail sur le piston , transféré au gaz, de valeur :

$$W' = P_0 S h'$$

Le premier principe appliqué au gaz, permet d'écrire :

$$\Delta U_{gaz} = m g (h + h') + P_0 S h'$$

Soit :

$C_v (T_1 - T_0) = m g (h + h') + P_0 S h'$

2ème méthode : Bilan d'énergie totale

On considère le système formé par le calorimètre, le gaz, le piston, l'air ambiant, la masse et la Terre. Pour cette expérience, l'énergie totale de ce système reste constante au cours de la transformation. On fait alors un bilan d'énergie totale, interne + macroscopique en prenant pour référence d'énergie potentielle de pesanteur nulle la position la plus basse du centre de gravité de la masse.

Etat initial :

Le gaz a une énergie totale (incluant l'énergie d'agitation thermique, chimique et nucléaire) :

$$E_{gaz,0} = C_v T_0 + K$$

L'air ambiant, une énergie totale : $E_{air,0}$

Le calorimètre, une énergie totale : $E_{cal,0}$

Le piston, une énergie totale : $E_{pist,0}$

La masse, une énergie totale : $E_{masse,0} = m g (h + h') + K'$

Etat final :

Le gaz a une énergie totale (seule son énergie d'agitation thermique a varié) :

$$E_{gaz,1} = C_v T_1 + K$$

L'air ambiant a fourni un travail moteur W au piston, donc son énergie interne a diminué de la valeur de ce travail et son énergie totale est donc :

$$E_{air,1} = E_{air,0} - W = E_{air,0} - P_0 S h'$$

Le calorimètre et le piston ont une énergie totale qui n'a pas varié si on suppose négligeable leur échange de chaleur avec les autres sous systèmes (caractère athermal des parois et choc mou pour lequel on néglige la chaleur dissipée).

La masse a une énergie totale (seule son énergie potentielle de pesanteur a varié) :

$$E_{masse,1} = 0 + K' = K'$$

Le bilan de conservation de l'énergie se traduit alors par :

$$\begin{aligned} C_v T_1 + K + E_{air,0} - P_0 S h' + E_{cal,0} + E_{pist,0} + K' = \\ C_v T_0 + K + E_{air,0} + E_{cal,0} + E_{pist,0} + m g (h + h') + K' \end{aligned}$$

Soit en simplifiant :

$$C_v T_1 - P_0 S h' = C_v T_0 + m g (h + h')$$

On retrouve la même relation que précédemment.

Remarque : On peut considérer aussi comme système simplement le gaz, le piston, le calorimètre et la masse. Auquel cas dans le bilan d'énergie totale, il faut considérer le poids de la masse et la force pressante exercée par l'air sur le piston comme des forces extérieures au système. La variation d'énergie totale du système n'est alors plus nulle mais égale au travail de ces deux forces.

Relation entre volume initial et final :

$$V_0 - V_1 = S h'$$

Equation d'état du gaz parfait :

$$\frac{P_0 V_0}{T_0} = \frac{P_1 V_1}{T_1}$$

Equilibre du piston à l'état final :

$$P_1 S = P_0 S + m g$$

On tire de ces équations :

$$V_1 = V_0 \frac{P_0 T_1}{P_1 T_0}$$

$$C_v (T_1 - T_0) = m g h + (m g + P_0 S) h'$$

$$C_v (T_1 - T_0) = m g h + P_1 S h'$$

$$C_v (T_1 - T_0) = m g h + P_1 (V_0 - V_1)$$

$$C_v T_1 - C_v T_0 = m g h + P_1 \left(V_0 - V_0 \frac{P_0 T_1}{P_1 T_0} \right)$$

$$C_v T_1 + P_1 V_0 \frac{P_0 T_1}{P_1 T_0} = m g h + P_1 V_0 + C_v T_0$$

$$\left(C_v + \frac{P_0 V_0}{T_0}\right) T_1 = m g h + \left(\frac{m g}{S} + P_0\right) V_0 + C_v T_0$$

$$\left(\frac{n R}{\gamma - 1} + n R\right) T_1 = m g h + \frac{m g}{S} V_0 + P_0 V_0 + \frac{n R}{\gamma - 1} T_0$$

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} n R T_1 = m g \left(h + \frac{V_0}{S}\right) + n R T_0 + \frac{n R}{\gamma - 1} T_0$$

$$T_1 = \frac{(\gamma - 1) m g}{\gamma n R} \left(h + \frac{V_0}{S}\right) + T_0$$

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{(\gamma - 1) m g}{\gamma n R T_0} \left(h + \frac{V_0}{S}\right)\right)$$

Finalement :

$$T_1 = T_0 \left(1 + \frac{(\gamma - 1) m g}{\gamma P_0 V_0} \left(h + \frac{V_0}{S}\right)\right)$$