

Moyenne de Cesaro

Enoncé :

Soit L un réel, U une suite de réels et V la suite définie au rang 1 par :

$$V_n = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n}$$

Autrement dit, V_n est la moyenne arithmétique des n premiers termes de la suite U . Alors on a :

- 1) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L$ et la réciproque est fausse
- 2) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ (resp $-\infty$) alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ (resp $-\infty$) et la réciproque est fausse
- 3) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L$ et U monotone alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$
- 4) Si U est bornée alors V est bornée et la réciproque est fausse
- 5) Si U est croissante alors V est croissante et la réciproque est fausse

Preuves :

A noter tout d'abord que tous ces résultats sont intuitifs avec un peu de sens physique. Si nous plaçons en effet n masses ponctuelles de 1 unité sur un axe gradué aux abscisses $U_1, U_2, \dots, U_n$ alors V_n est la position du centre de gravité de ces masses. Montrons les en toute rigueur mathématique.

1)

a) Commençons par un cas particulier, celui où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow |U_n| < \frac{\varepsilon}{2}$$

D'autre part :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{n_0}}{n} = 0$$

donc :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 \Rightarrow \left| \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{n_0}}{n} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Posons :

$$n_2 = \max(n_0, n_1)$$

Alors pour $n > n_2$ on a :

$$\begin{aligned} \left| \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} \right| &\leq \left| \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{n_0}}{n} \right| + \left| \frac{U_{n_0+1} + U_{n_0+2} + \dots + U_n}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{n_0}}{n} \right| + \frac{|U_{n_0+1}| + |U_{n_0+2}| + \dots + |U_n|}{n} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{n - n_0}{n} \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

b) Traitons le cas général où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = L$

Dans ce cas on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - L) = 0$$

On en déduit d'après le résultat précédent que l'on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(U_1 - L) + (U_2 - L) + \dots + (U_n - L)}{n} = 0$$

ce qui s'écrit encore :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} - L = 0$$

d'où le résultat

c) Montrons par un exemple que la réciproque est fausse

Soit la suite U définie par : $U_n = (-1)^n$ alors :

$$\text{si } n \text{ impair : } V_n = \frac{-1}{n}, \text{ si } n \text{ pair : } V_n = 0$$

donc V converge vers 0 tandis que U n'a pas de limite

2) Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ par exemple le cas $+\infty$ se traitant de façon similaire

Soit $A > 0$ alors :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow U_n > A + 1$$

donc pour $n > n_0$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} &= \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{n_0}}{n} + \frac{U_{n_0+1} + U_{n_0+2} + \dots + U_n}{n} \\ &> \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{n_0}}{n} + \frac{n - n_0}{n} (A + 1) \end{aligned}$$

Or :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{n_0}}{n} + \frac{n - n_0}{n} (A + 1) = A + 1$$

Donc :

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : n > n_1 > n_0 \Rightarrow \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} \geq A + 1 > A$$

D'où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$$

Pour prouver que la réciproque est fausse, il suffit de considérer la suite U définie par :

$$U_n = 0 \text{ si } n \text{ impair, } U_n = n \text{ si } n \text{ pair}$$

Alors :

$$\begin{aligned} V_{2n} &= \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{2n}}{2n} = \frac{0 + 2 + 0 + 4 + \dots + 0 + 2n}{2n} \\ &= \frac{(2 + 4 + \dots + 2n)}{2n} \\ &= \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

$$V_{2n+1} = \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{2n+1}}{2n+1} = \frac{n(n+1)}{2n+1}$$

Ainsi :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_{2n+1} = +\infty$$

Donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$$

Et cependant, U ne tend pas vers $+\infty$

3) Supposons $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = L$ et U monotone alors U tend vers une limite finie ou infinie. Mais d'après ce qui précède cette limite ne peut être infinie.

4) Supposons U bornée alors

$$\exists M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : |U_n| \leq M$$

Alors :

$$\left| \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_n}{n} \right| \leq \frac{|U_1| + |U_2| + \dots + |U_n|}{n} \leq \frac{M + M + \dots + M}{n} = M$$

Donc V est bornée

Pour prouver que la réciproque est fausse, il suffit de considérer la suite U définie par :

$$U_n = n \text{ si } n \text{ impair}, U_n = -n \text{ si } n \text{ pair}$$

Alors :

$$\begin{aligned} V_{2n} &= \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{2n}}{2n} = \frac{(1-2) + (3-4) \dots + (2n-1) - 2n}{2n} = \\ &= \frac{(-1) + (-1) \dots + (-1)}{2n} = \frac{-n}{2n} = \frac{-1}{2} \\ V_{2n+1} &= \frac{U_1 + U_2 + \dots + U_{2n+1}}{2n+1} = \frac{-n + 2n+1}{2n+1} = \frac{n+1}{2n+1} \end{aligned}$$

Les suites des termes de rang pair et impair sont bornées donc V est bornée mais U ne l'est pas.

5) Supposons U croissante alors :

$$\begin{aligned}
 V_{n+1} - V_n &= \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_{n+1}}{n+1} - \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}{n} \\
 &= \frac{n(U_1 + U_2 + \cdots + U_{n+1}) - (n+1)(U_1 + U_2 + \cdots + U_n)}{n(n+1)} \\
 &= \frac{n U_{n+1} - (U_1 + U_2 + \cdots + U_n)}{n(n+1)} \\
 &= \frac{(U_{n+1} - U_1) + (U_{n+1} - U_2) + \cdots + (U_{n+1} - U_n)}{n(n+1)} \geq 0
 \end{aligned}$$

donc V est croissante

La réciproque est fausse. Il suffit de considérer la suite :

$$U_n = n \text{ si } n \text{ pair,} \quad U_n = U_{n-1} - 1 \text{ si } n \text{ impair}$$