<u>Enoncé :</u>

Déterminer par 2 méthodes les fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\,(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \in \mathbb{R}^2 :\ \boldsymbol{f(x+y)+f(x-y)=2\,f(x)+2\,f(y)} \quad (\boldsymbol{E})$$

<u>Réponse :</u>

<u>1ère méthode :</u>

Soit f une fonction vérifiant l'équation (E) alors, en prenant $x=y=0$ on a :

$$f(0)+f(0)=2\,f(0)+2\,f(0)$$

Donc :

$$f(0)=0$$

Puis en prenant : $x=0, y \in \mathbb{R}$:

$$f(y)+f(-y)=2\,f(0)+2\,f(y)$$

$$\boxed{f(-y)=f(y)}$$

Donc $\boldsymbol{f}$ **est paire**.

Puis en prenant : $y=x, x \in \mathbb{R}$:

$$f(2\,x)+f(0)=2\,f(x)+2\,f(x)$$

$$f(2\,x)=4\,f(x)$$

Cela suggère pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété P_n:

$$\boxed{\forall\,x \in \mathbb{R} :\ f(n\,x)=n^2\,f(x)}$$

Propriété que nous allons vérifier par récurrence forte :

Initialisation : P_0 est vraie de même que P_1

Hérédité : On suppose P_k vraie pour tout $k \in [\![0;n]\!]$ alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f(n\,x+x)+f(n\,x-x)=2\,f(n\,x)+2\,f(x)$$

Donc :

$$f\big((n+1)\,x\big)=2\,f(n\,x)+2\,f(x)-f\big((n-1)\,x\big)$$

Ainsi :

$$f\big((n+1)\,x\big)=2\,n^2\,f(x)+2\,f(x)-\ (n-1)^2\,f(x)$$

$$f\big((n+1)\,x\big)=(2\,n^2+2-\ (n-1)^2)\,f(x)$$

$$f\big((n+1)\,x\big)=(2\,n^2+2-n^2+2\,n-1\,)\,f(x)$$

$$f\big((n+1)\,x\big)=(\,n^2+2\,n+1\,)\,f(x)$$

$$f\big((n+1)\,x\big)=(n+1)^2\,f(x)$$

Donc la propriété P_{n+1} est vraie, ce qui prouve bien que la propriété P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De plus, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f(x) = f\left(m\ \frac{x}{m}\right) = m^2\ f\left(\frac{x}{m}\right)$$

Donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : f\left(\frac{1}{m}\ x\right) = \ f\left(\frac{x}{m}\right) = \frac{1}{m^2}\ f(x)$$

Et donc, , pour tout $(n, m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$:

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f\left(\frac{n}{m}\ x\right) = f\left(n \frac{1}{m}\ x\right) = n^2 f\left(\frac{1}{m}\ x\right) = n^2 \frac{1}{m^2}\ f(x) = \left(\frac{n}{m}\right)^2\ f(x)$$

Et :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f\left(-\frac{n}{m}\ x\right) = f\left(\frac{n}{m}(-x)\right) = \left(\frac{n}{m}\right)^2\ f(-x) = \left(-\frac{n}{m}\right)^2\ f(x)$$

On a ainsi pour tout rationnel r :

$$\boxed{\forall\, \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} :\ \boldsymbol{f(r\,x) = r^2\, f(x)}}$$

Soit alors $y \in\ \mathbb{R}$: Il existe une suite de rationnels $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que :

$$\lim_{n\to+\infty} r_n = y$$

Ainsi :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f(r_n\, x) = {r_n}^2\ f(x)$$

Et par passage à la limite :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\ f(y\, x) = y^2\ f(x)$$

En particulier en prenant $x = 1$:

$$\forall\, y \in \mathbb{R} :\ f(y) = y^2\ f(1)$$

Donc f est une fonction de la forme :

$$\boxed{f(x) = a\, x^2, \qquad a \in \mathbb{R}}$$

Réciproquement : Pour f de la forme précédente :

$$f(x+y) + f(x-y) = a\,(x+y)^2 + a\,(x-y)^2 = a\,(x^2 + 2\,x\,y + y^2 + x^2 - 2\,x\,y + y^2)$$
$$= 2\,a\,x^2 + 2\,a\,y^2 = 2\,f(x) + 2\,f(y)$$

Donc f est solution de (E).

<u>2 ème méthode :</u>

Soit f une fonction vérifiant l'équation (E) alors :

$$\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt = \int_{x-1}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{x+1} f(t)dt$$

Faisons le changement de variable : $u = x - t$ dans la première intégrale et $u = t - x$ dans la seconde alors :

$$\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt = \int_0^1 f(x-u)\, dt + \int_0^1 f(x+u)\, dt = \int_0^1 \big(f(x+u) + f(x-u)\big)\, dt$$

$$= \int_0^1 \big(2\, f(x) + 2\, f(u)\big)\, dt = 2\, \int_0^1 f(u)\, du + 2\, f(x)$$

Ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{2}\int_{x-1}^{x+1} f(t)dt - \int_0^1 f(u)\, du$$

On en déduit que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que :

$$f'(x) = \frac{1}{2}\,\big(f(x+1) - f(x-1)\big)$$

Et donc que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Or :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; f(x+y) + f(x-y) = 2\, f(x) + 2\, f(y)$$

En dérivant deux fois par rapport à x puis par rapport à y cette relation on obtient :

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2\, f''(x)$$

$$f''(x+y) + f''(x-y) = 2\, f''(y)$$

Donc :

$$\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\; f''(x) = f''(y)$$

En particulier , pour $y = 0$

$$\forall\, x \in \mathbb{R} :\; f''(x) = f''(0)$$

Donc f'' est constante et f de la forme :

$$f(x) = a\, x^2 + b\, x + c$$

En intégrant le fait que $f(0) = 0$ et que f est paire comme dans la première méthode, on en déduit que f est de la forme :

$$f(x) = a\, x^2$$