

Loi de Pascal en probabilités

On considère une suite infinie d'évènements mutuellement indépendant (S_n) de même probabilité p .

Exemple de telle suite : Soit une urne contenant 2 boules rouges et 4 boules vertes indiscernables au toucher. On considère l'expérience aléatoire qui consiste à tirer indéfiniment avec remise une boule de l'urne.

On définit alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ l'évènement $S_n =$ "obtenir une boule rouge au n - ième tirage" de probabilité $p = \frac{1}{3}$.

On définit pour un entier naturel non nul donné r la suite de variable aléatoire $(X_i)_{i=0,r}$ où :

X_0 est égal à 0

X_1 est égal au plus petit entier k pour lequel S_k est réalisé.

X_2 est égal au plus petit entier $k > X_1$ pour lequel S_k est réalisé moins X_1

X_3 est égal au plus petit entier $k > X_2$ pour lequel S_k est réalisé moins $X_1 + X_2$

Etc..

De façon générale , pour tout $1 \leq n \leq r$, X_n est égal au plus petit entier $k > X_{n-1}$ pour lequel S_k est réalisé moins $X_0 + X_1 + \dots + X_{n-1}$.

Loi de X_n :

X_1 suit une loi géométrique de paramètre p et pour tout $n \geq 2$ et $k \geq 1$:

$$\begin{aligned}
 P(X_n = k) &= \sum_{1 < i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}} P((X_n = k) \cap (X_{n-1} = i_{n-1}) \cap \dots \cap (X_1 = i_1)) \\
 &= \sum_{\substack{1 < i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1} \\ s = i_1 + i_2 + \dots + i_{n-1}}} P(S_{k+s} \cap \overline{S_{k-1+s}} \cap \dots \cap \overline{S_{1+s}}) P((X_{n-1} = i_{n-1}) \cap \dots \cap (X_1 = i_1)) \\
 &= \sum_{1 < i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}} p q^{k-1} P((X_{n-1} = i_{n-1}) \cap \dots \cap (X_1 = i_1)) \\
 &= p q^{k-1} \sum_{1 < i_1 < i_2 < \dots < i_{n-1}} P((X_{n-1} = i_{n-1}) \cap \dots \cap (X_1 = i_1)) \\
 &= p q^{k-1}
 \end{aligned}$$

Donc chaque variable X_n suit une loi géométrique de paramètre p et ces variables sont mutuellement indépendantes.

On a donc :

$$E(X_n) = \frac{1}{p}, \quad V(X_n) = \frac{q}{p^2}, \quad \text{où } q = 1 - p$$

Loi de probabilité de $Y = X_1 + X_2 + \dots + X_r$ d'univers $Y(\Omega) = \llbracket r, +\infty \rrbracket$.

Nous allons l'obtenir par deux méthodes :

1^{ère} méthode : calcul direct

Pour $k \geq 1$: On définit l'évènement :

$$T_{k-1} = \text{"sur les } k - 1 \text{ premiers évènements, } r - 1 \text{ sont réalisés"}.$$

On a alors :

$$P(Y = k) = P(S_k \cap T_{k-1}) = P(S_k) P(T_{k-1}) = p P(T_{k-1})$$

Or :

$$T_{k-1} = \bigcup_{\substack{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_{r-1} \leq k-1 \\ \{i_1, \dots, i_{r-1}\} = \{1, \dots, k-1\}}} S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_{r-1}} \cap \overline{S_{i_r}} \cap \overline{S_{i_{r+1}}} \cap \dots \cap \overline{S_{i_{k-1}}}$$

Et :

$$P(S_{i_1} \cap S_{i_2} \cap \dots \cap S_{i_{r-1}} \cap \overline{S_{i_r}} \cap \overline{S_{i_{r+1}}} \cap \dots \cap \overline{S_{i_{k-1}}}) = p^{r-1} q^{k-r}$$

Donc :

$$P(Y = k) = \binom{k-1}{r-1} p^r q^{k-r}$$

On dit alors de Y qu'elle suit une loi de Pascal de paramètres r et p : $Y \sim \mathcal{P}(r, p)$

Espérance et variance s'en déduisent :

$$E(X) = E(X_1) + E(X_2) + \dots + E(X_r) = \frac{r}{p}$$

$$V(X) = V(X_1) + V(X_2) + \dots + V(X_r) = \frac{r q}{p^2}$$

2^{ème} méthode : En utilisant la fonction génératrice de Y

D'une part :

$$G_Y(t) = E(t^Y) = \sum_{k=r}^{+\infty} t^k P(Y = k)$$

D'autre part :

$$G_Y(t) = E(t^{X_1+X_2+\dots+X_r}) = E(t^{X_1}) \dots E(t^{X_r})$$

Or pour tout $1 \leq n \leq r$:

$$E(t^{X_n}) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k P(X_n = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k p q^{k-1} = p t \sum_{k=1}^{+\infty} (q t)^{k-1} = \frac{p t}{1 - q t}$$

Donc :

$$G_Y(t) = \left(\frac{p t}{1 - q t} \right)^r = p^r t^r (1 - q t)^{-r}$$

Rappelons le développement en série entière :

$$(1 + x)^a = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-(k-1))}{k!} x^k$$

Duquel on déduit :

$$\begin{aligned} (1 - x)^{-r} &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{-r(-r-1)\dots(-r-(k-1))}{k!} (-1)^k x^k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r(r+1)\dots(r+(k-1))}{k!} x^k \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} G_Y(t) &= p^r t^r \left(1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{r(r+1)\dots(r+(k-1))}{k!} q^k t^k \right) \\ &= p^r t^r + \sum_{k=1}^{+\infty} p^r \frac{r(r+1)\dots(r+(k-1))}{k!} q^k t^{k+r} \\ &= p^r t^r + \sum_{k=r+1}^{+\infty} p^r \frac{r(r+1)\dots(k-1)}{(k-r)!} q^{k-r} t^k \\ &= p^r t^r + \sum_{k=r+1}^{+\infty} p^r \frac{(k-1)!}{(r-1)!(k-r)!} q^{k-r} t^k \\ &= p^r t^r + \sum_{k=r+1}^{+\infty} p^r \binom{k-1}{r-1} q^{k-r} t^k \end{aligned}$$

On en déduit, par identification des coefficients :

Pour $k = r$:

$$P(Y = r) = p^r$$

Pour $k \geq r + 1$

$$P(Y = k) = p^r \binom{k-1}{r-1} q^{k-r}$$

La formule précédente étant valable pour $k = r$.