

Formulation lagrangienne d'un mouvement 1D

1) Objectif : Exprimer un mouvement 1D à l'aide d'une formule variationnelle

Selon le principe de Fermat, on sait que le trajet de la lumière entre deux points A_1 et A_2 correspond à celui qui minimise le temps de parcours entre ces deux points.

En s'inspirant de ce point de vue, pour un mouvement d'une particule de masse m entre deux points d'abscisse x_1 et x_2 défini par une fonction réelle $x(t)$ de classe C^∞ telle $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$, on est amené à chercher une fonction de deux variables $L(x, y)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ que nous supposons de classe C^∞ telle que la fonction x réalise un état stationnaire (*) de la fonction :

$$S(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), x'(t)) dt$$

sur toutes les fonctions x vérifiant $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$.

(*) état stationnaire de S en x signifie nullité de la différentielle en x .

Afin de caractériser une telle fonction, nous allons considérer pour une fonction C^∞ η quelconque telle $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ la fonction :

$$f_\eta(\varepsilon) = S(x + \varepsilon \eta) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t) + \varepsilon \eta(t), x'(t) + \varepsilon \eta'(t)) dt$$

La stationnarité de S en x équivaut alors à écrire que la dérivée de f s'annule en 0. Or, par dérivation sous le signe intégral, on obtient :

$$\begin{aligned} f'_\eta(\varepsilon) &= \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \frac{\partial L}{\partial x}(x(t) + \varepsilon \eta(t), x'(t) + \varepsilon \eta'(t)) \\ &\quad + \eta'(t) \frac{\partial L}{\partial y}(x(t) + \varepsilon \eta(t), x'(t) + \varepsilon \eta'(t)) dt \end{aligned}$$

Et ainsi :

$$\begin{aligned} f'_\eta(0) &= \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t)) + \eta'(t) \frac{\partial L}{\partial y}(x(t), x'(t)) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t)) dt + \int_{t_1}^{t_2} \eta'(t) \frac{\partial L}{\partial y}(x(t), x'(t)) dt \end{aligned}$$

Une intégration par parties sur le second terme donne alors :

$$\int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t)) dt + \left[\eta(t) \frac{\partial L}{\partial y}(x(t), x'(t)) \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x(t), x'(t)) \right) dt$$

Or $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$ donc finalement :

$$f_{\eta}'(0) = \int_{t_1}^{t_2} \eta(t) \left(\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x(t), x'(t)) \right) \right) dt$$

$f_{\eta}'(0)$ nulle pour toute fonction η se traduit alors sur l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ =

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x(t), x'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial y}(x(t), x'(t)) \right)$$

qui est l'équation de Lagrange vérifiée par la fonction L appelée Lagrangien et souvent notée en 1D $L(x, \dot{x})$ auquel cas l'équation se réécrit usuellement sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \right) - \frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) = 0$$

2. Expression du Lagrangien pour un mouvement 1D

Le problème consiste maintenant à déterminer ce Lagrangien afin qu'il redonne les lois de Newton, qui, dans un cas simple de force associée à un potentiel V indépendant du temps s'écrit en 1D :

$$m \ddot{x} = - \frac{dV}{dx}$$

Une idée consiste à chercher L sous forme d'une combinaison de l'énergie cinétique $T = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$ et de l'énergie potentielle, soit :

$$L = \alpha T + \beta V = \alpha \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \beta V(x)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x, \dot{x}) \right) - \frac{\partial L}{\partial x}(x, \dot{x}) &= 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt}(\alpha m \dot{x}) - \beta \frac{dV}{dx} = 0 \\ \Leftrightarrow m \ddot{x} &= \frac{\beta}{\alpha} \frac{dV}{dx} \end{aligned}$$

Afin que le principe variationnel conduise à retrouver l'équation newtonienne du mouvement, il faut et il suffit donc d'avoir :

$$\frac{\beta}{\alpha} = -1$$

Soit : $\beta = -\alpha$, ce qui donne pour le Lagrangien :

$$L = \alpha \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x) \right)$$

Comme il nous suffit d'une seule fonction L , nous prendrons simplement $\alpha = 1$.

3. Conclusion de l'étude

Pour déterminer le mouvement à une dimension d'une particule entre deux positions $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$, le potentiel associé aux forces étant indépendant du temps, il est équivalent de :

- **Résoudre l'équation newtonienne :**

$$m \ddot{x} = - \frac{dV}{dx}$$

- **Résoudre l'équation lagrangienne :**

$S(x) = \int_{t_1}^{t_2} L(x(t), x'(t)) dt$ est stationnaire pour la trajectoire x considérée sachant :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x)$$

Cette formulation est entièrement équivalente aux lois de Newton lorsque les forces dérivent d'un potentiel, mais elle possède l'avantage de se généraliser naturellement à des systèmes beaucoup plus complexes et constitue le point de départ de la formulation hamiltonienne puis de la mécanique quantique.

Exemples d'application : Le pendule simple :

Variable décrivant le mouvement

On choisit naturellement comme coordonnée généralisée l'angle orienté θ formé par le pendule avec la verticale

Energie cinétique :

La vitesse est

$$v = l\dot{\theta},$$

où l est la longueur du pendule, donc :

$$T = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2.$$

Energie potentielle de pesanteur :

En prenant l'origine au point le plus bas,

$$V = mgl(1 - \cos \theta).$$

Lagrangien :

$$L = T - V = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos \theta).$$

Equation de Lagrange :

On calcule :

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = ml^2 \dot{\theta},$$

puis

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} \right) = ml^2 \ddot{\theta}.$$

Ensuite

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -mgl \sin \theta.$$

L'équation devient

$$ml^2 \ddot{\theta} + mgl \sin \theta = 0,$$

soit

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0.}$$

On retrouve bien l'équation donnée par l'application de la seconde loi de Newton.