Formes bilinéaires symétriques et formes sesquilinéaires hermitiennes

1. Forme linéaire sur un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et forme semi-linéaire sur un $\mathbb{C}$ espace vectoriel

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et F un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

Une **forme linéaire** sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{R}$ c'est-à-dire une application f vérifiant :

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v},\lambda) \in E \times E \times \mathbb{R} \ : \ f(\vec{u}+\lambda\,.\,\vec{v}) = f(\vec{u}) + \lambda\,.\,f(\vec{v})$$

Une **forme semi-linéaire (ou anti-linéaire)** sur F est une application f de F dans $\mathbb{C}$ vérifiant :

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v},\lambda) \in F \times F \times \mathbb{C} : \ f(\vec{u}+\lambda\,.\,\vec{v}) = f(\vec{u}) + \bar{\lambda}\,.\,f(\vec{v})$$

Expression générale d'une forme linéaire et d'une forme semi-linéaire en dimension finie dans une base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$. Pour $\vec{u} = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + \cdots + x_n\,\vec{e}_n$:

Forme linéaire : $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$

$$f(\vec{u}) = a_1\,x_1 + a_2\,x_2 + \cdots + a_n\,x_n$$

Forme semi-linéaire : $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{\,n}$

$$f(\vec{u}) = a_1\,\overline{x_1} + a_2\,\overline{x_2} + \cdots + a_n\,\overline{x_n}$$

Exemples en dimension infinie : $E =$ ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ intégrables sur $\mathbb{R}\ (resp\ \mathbb{C})$, $\ \vec{u} = (x \to u(x)), v \in E\ (resp\ F)$

Forme linéaire :

$$f(\vec{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,u(x)\,dx$$

Forme semi-linéaire :

$$f(\vec{u}) = \int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,\overline{u(x)}\,dx$$

2. Forme bilinéaire et forme sesquilinéaire :

Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel et F un $\mathbb{C}$ espace vectoriel.

Une **forme bilinéaire** sur E est une application f sur $E \times E$, vérifiant :

$$\forall\,(\vec{u},\vec{v},\vec{w},\lambda) \in E \times E \times \mathbb{R} \ :$$

$$f(\vec{u}+\lambda\,.\,\vec{v},\vec{w}) = f(\vec{u},\vec{w}) + \lambda\,.\,f(\vec{v},\vec{w})$$

$$f(\vec{u},\vec{v}+\lambda\,.\,\vec{w}) = f(\vec{u},\vec{v}) + \lambda\,.\,f(\vec{u},\vec{w})$$

f est dite linéaire par rapport à sa première et à sa deuxième variable.

Une **forme sesquilinéaire** sur F est une application f sur $F \times F$ vérifiant :

$$\forall\ (\vec{u},\vec{v},\vec{w},\lambda) \in E \times E \times \mathbb{R}\ :$$

$$f(\vec{u}+\lambda\,.\,\vec{v},\vec{w}) = f(\vec{u},\vec{w}) + \lambda\,.\,f(\vec{v},\vec{w})$$

$$f(\vec{u},\vec{v}+\lambda\,.\,\vec{w}) = f(\vec{u},\vec{v}) + \bar{\lambda}\,.\,f(\vec{u},\vec{w})$$

f est dite linéaire par rapport à sa première et anti-linéaire par rapport à sa deuxième variable.

Expression générale d'une forme bilinéaire et d'une forme sesquilinéaire en dimension finie dans une base $(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\dots,\vec{e}_n)$. Pour $\vec{u} = x_1\,\vec{e}_1 + x_2\,\vec{e}_2 + \cdots + x_n\,\vec{e}_n, \vec{v} = y_1\,\vec{e}_1 + y_2\,\vec{e}_2 + \cdots + y_n\,\vec{e}_n$ et en notant : $X^T = (x_1,x_2,\dots,x_n), Y = (y_1,y_2,\dots,y_n)^T$:

Forme bilinéaire : $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{(i,j)} a_{ij}\,x_i\,y_j \ = X^T\,A\,\,Y$$

Forme sesquilinéaire : $(a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \sum_{(i,j)} a_{ij}\,x_i\,\overline{y_j} \ = X^T\,A\,\,\bar{Y}$$

Exemples en dimension infinie :Soit E (resp F) l' ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(resp\ \mathbb{C})$ intégrables sur $\mathbb{R}$, $\vec{u} = (x \to u(x)), \vec{v} = (x \to v(x)), a \in E\ (resp\ F)$

Forme bilinéaire :

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\,u(x)\,v(x)\,dx$$

Forme sesquilinéaire :

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} a(x)\,u(x)\,\overline{v(x)}\,dx$$

3. Forme bilinéaire symétrique et forme sesquilinéaire hermitienne :

Une forme bilinéaire sur E est dite symétrique si elle vérifie :

$$\forall\ (\vec{u},\vec{v}) \in E \times E :\ f(\vec{v},\vec{u}) = \ f(\vec{u},\vec{v})$$

Une forme bilinéaire sur F est dite hermitienne si elle vérifie :

$$\forall\ (\vec{u},\vec{v}) \in F \times F :\ f(\vec{v},\vec{u}) = \ \overline{f(\vec{u},\vec{v})}$$

Pour les exemples donnés précédemment, c'est le cas en dimension finie pour les formes linéaires telles que A soit symétrique, c'est-à-dire vérifie $A^T = A$ et pour les formes sesquilinéaires telles que A soit hermitienne, c'est-à-dire vérifie $A^T = \bar{A}$.

Exemples :

Forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^3$:

$$f(\vec{u},\vec{v}) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}7 & 4 & 6\\ 4 & 2 & -5\\ 6 & -5 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\end{pmatrix} = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}7\,y_1+4\,y_2+6\,y_3\\ 4\,y_1+2\,y_2-5\,y_3\\ 6\,y_1-5\,y_2+3\,y_3\end{pmatrix} =$$

$$= 7x_1\,y_1 + 4\,x_1\,y_2 + 6\,x_1\,y_3 + 4\,x_2\,y_1 + 2\,x_2\,y_2 - 5\,x_2\,y_3 + 6\,x_3\,y_1 - 5\,x_3\,y_2 + 3\,x_3\,y_3$$

Forme sesquilinéaire hermitienne sur $\mathbb{C}^3$:

$$f(\vec{u},\vec{v}) = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}7 & -4\,i & 6\\ 4\,i & 2 & -5+i\\ 6 & -5-i & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{y_1}\\ \overline{y_2}\\ \overline{y_3}\end{pmatrix} = (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}7\,\overline{y_1}-4\,i\,\overline{y_2}+6\,\overline{y_3}\\ 4\,i\,\overline{y_1}+2\,\overline{y_2}+(-5+i)\,\overline{y_3}\\ 6\,\overline{y_1}+(-5-i)\,\overline{y_2}+3\,\overline{y_3}\end{pmatrix}$$

$$=$$

$$= 7x_1\,\overline{y_1} - 4\,i\,x_1\,\overline{y_2} + 6\,x_1\,\overline{y_3} + 4\,i\,x_2\,\overline{y_1} + 2\,x_2\,\overline{y_2} + (-5+i)\,x_2\,\overline{y_3} + 6\,x_3\,\overline{y_1} + (-5-i)\,x_3\,\overline{y_2} + 3\,x_3\,\overline{y_3}$$

4. Forme bilinéaire et forme sesquilinéaire associée à un opérateur fonctionnel

Soit E (resp F) l' ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ $(resp\ \mathbb{C})$ intégrables sur $\mathbb{R}$,

$\vec{u} = (x \to u(x)), \vec{v} = (x \to v(x)) \ \in E(resp\ F).$

Soit $\hat{A}$ un opérateur fonctionnel linéaire sur E (resp F), c'est-à-dire un endomorphisme de E (resp F). Alors nous pouvons créer en notant $\hat{A}\ \ v(x) = \hat{A}(v)(x)$ respectivement :

Une forme bilinéaire sur E :

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\hat{A}\ \ v(x)\,dx$$

Cette forme est symétrique si et seulement si l'opérateur $\hat{A}$ vérifie pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\,\hat{A}\,u(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\,\hat{A}\,v(x)\,dx$$

On dit alors de l'opérateur A qu'il est symétrique pour la forme bilinéaire définie positive canonique, laquelle définit un **produit scalaire** sur E :

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\ \ v(x)\,dx$$

Le caractère symétrique se traduit alors également pat l'écriture :

$$\left(\hat{A}\,\vec{u},\vec{v}\right) = \left(\hat{A}\,\vec{v},\vec{u}\right)$$

Une forme sesquilinéaire sur F:

$$f(\vec{u},\vec{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(x)}\,\hat{A}\ \ u(x)\,dx$$

Cette forme est hermitienne si et seulement si l'opérateur A vérifie pour tout couple $(\vec{u},\vec{v})$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{u(x)}\,\hat{A}\ \ v(x)\,dx = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{v(x)}\,\hat{A}\ \ u(x)\,dx}$$

On dit alors de l'opérateur A qu'il est hermitien pour la forme sesquilinéaire définie positive canonique, laquelle définit un **produit scalaire hermitien** sur E :

$$(\vec{u},\vec{v}) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)\ \ \overline{v(x)}\,dx$$

Le caractère hermitien se traduit alors également pat l'écriture :

$$\left(\hat{A}\,\vec{u},\vec{v}\right) = \overline{\left(\hat{A}\,\vec{v},\vec{u}\right)}$$

5. Exemples d'opérateurs hermitiens rencontrés en physique quantique :

Exemple 1 : Opérateur associé au potentiel électrostatique $V \epsilon\, E$:

Pour $(x \to \psi(x))\ \epsilon\ F$: $\quad \hat{A}\,\psi(x) = V(x)\,\psi(x)$

Preuve :

$$\overline{\psi(x)}\,\hat{A}\,\varphi(x) = \overline{\psi(x)}\,V(x)\,\varphi(x) = \overline{\overline{\varphi(x)}\,V(x)\,\psi(x)}$$

Donc :

$$\left(\hat{A}\,\varphi,\psi\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)}\,\hat{A}\,\varphi(x)\,dx = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\varphi(x)}\,V(x)\,\psi(x)\,dx} = \overline{\left(\hat{A}\,\psi,\varphi\right)}$$

Exemple 2 : Opérateur associé à la quantité de mouvement :

$$\boldsymbol{(x \to \psi(x))\ \epsilon\ F} : \qquad \boldsymbol{\hat{A}\,\psi(x) = -i\,\hbar\,\frac{d\psi}{dx}(x)}$$

Preuve :

$$\left(\hat{A}\,\varphi,\psi\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)}\,\hat{A}\,\varphi(x)\,dx = -i\,\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)}\,\frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx$$

$$= -i\,\hbar \left(\left[\overline{\psi(x)}\,\varphi(x)\right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\overline{\psi}}{dx}(x)\,\varphi(x)\,dx \right)$$

$$= i\,\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\overline{\psi}}{dx}(x)\,\varphi(x)\,dx$$

$$\left(\hat{A}\,\psi,\varphi\right) = i\,\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\varphi}}{dx}(x)\,\psi(x)\,dx = \overline{-\imath\,\hbar \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)}\,\frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx} = \overline{\left(\hat{A}\,\varphi,\psi\right)}$$

Exemple 3 : Opérateur associé au carré de la norme de la quantité de mouvement :

$$\boxed{(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}))\ \boldsymbol{\epsilon}\ \boldsymbol{F} : \qquad \widehat{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = \hbar^2\,\frac{\boldsymbol{d^2\psi}}{\boldsymbol{dx^2}}(\boldsymbol{x})}$$

Preuve :

$$\left(\hat{A}\,\varphi,\psi\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)}\,\hat{A}\,\varphi(x)\,dx = \hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)}\,\frac{d^2\varphi}{dx^2}(x)\,dx$$

$$= \hbar^2 \left(\left[\overline{\psi(x)}\,\frac{d\varphi}{dx}(x) \right]_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\bar{\psi}}{dx}(x)\,\frac{d\varphi}{dx}(x)\,dx \right)$$

$$= -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\varphi}{dx}(x)\,\frac{d\bar{\psi}}{dx}(x)\,dx$$

$$\left(\hat{A}\,\psi,\varphi\right) = -\hbar^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\psi}{dx}(x)\,\frac{d\bar{\varphi}}{dx}(x)\,dx = \overline{\left(\hat{A}\,\varphi,\psi\right)}$$

Exemple : Opérateur hamiltonien associé à l'énergie :

$$\boxed{(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}))\ \boldsymbol{\epsilon}\ \boldsymbol{F}: \qquad \widehat{\boldsymbol{A}}\,\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x}) = -\frac{\boldsymbol{\hbar^2}}{\boldsymbol{2\,m}}\,\frac{\boldsymbol{d^2\psi}}{\boldsymbol{dx^2}}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{x})}$$

Preuve : C'est la somme de deux opérateurs hermitiens.

6. <u>Valeurs propre et vecteurs propre d'un opérateur symétrique ou hermitien</u>

Commençons par définir de façon plus générale un opérateur symétrique réel :

<u>En dimension finie :</u>

> Si A est une matrice symétrique réelle (respectivement hermitienne complexe) d'ordre n, et $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ on pose :
>
> $$\hat{A} : X \to A\,X$$
>
> $\hat{A}$ n'est autre que l'application linéaire canonique associée à la matrice A définie comme un endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (resp $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$).
>
> Les valeurs propres et les vecteurs propres de l'opérateur $\hat{A}$ sont ses valeurs propres et vecteurs propres en tant qu'endomorphisme, donc de la matrice A.

Propriété :

Soit $\boldsymbol{\lambda_1, \lambda_2}$ deux valeurs propres distinctes de $\boldsymbol{\widehat{A}}$ et $\boldsymbol{X_1, X_2}$ deux vecteurs propres non nuls respectivement associés. Alors $\boldsymbol{X_1}$ et $\boldsymbol{X_2}$ sont orthogonaux pour le produit scalaire associé, c'est-à-dire :

Pour $\boldsymbol{\widehat{A}}$ symétrique :

$$(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}) = \boldsymbol{X_2}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{0}$$

Pour $\boldsymbol{\widehat{A}}$ hermitien :

$$(\boldsymbol{X_1}, \boldsymbol{X_2}) = \overline{\boldsymbol{X_2}}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{X_1} = \boldsymbol{0}$$

Preuve :

On montre tout d'abord que les valeurs propres d'une matrice hermitienne sont réelles.

Soit λ une valeur propre de A et X un vecteur propre non nul associé. Alors :

$$A\,X = \lambda\,X$$

En prenant le conjugué :

$$\bar{A}\,\bar{X} = \bar{\lambda}\,\bar{X}$$

Ainsi :

$$\bar{X}^T A\,X = \lambda\ \bar{X}^T\,X$$

$$\bar{X}^T A\,X = X^T A^T \bar{X} = X^T \bar{A}\,\bar{X} = \bar{\lambda}\ X^T\ \bar{X} = \bar{\lambda}\,\bar{X}^T\,X$$

Donc :

$$\lambda\ \bar{X}^T\,X = \bar{\lambda}\,\bar{X}^T\,X$$

Et comme $X \neq 0$: $\bar{X}^T\,X \neq 0$ donc : $\lambda = \bar{\lambda}$

Preuve de l'autre propriété dans les cas d'une matrice symétrique et d'une matrice hermitienne :

$$A\,X_1 = \lambda_1\,X_1$$

$$A\,X_2 = \lambda_2\,X_2$$

donc en prenant le conjugué :

$$\bar{A}\,\overline{X_2} = \lambda_2\,\overline{X_2}$$

Et d'une part :

$$\overline{X_2}^T\,A\,X_1 = \overline{X_2}^T\,\lambda_1\,X_1 = \lambda_1\,\overline{X_2}^T\,X_1$$

D'autre part , en prenant la transposée

$$\overline{X_2}^T\,A\,X_1 = \left(\overline{X_2}^T\,A\,X_1\right)^T = {X_1}^T\,A^T\,\overline{X_2} = {X_1}^T\,\bar{A}\,\overline{X_2} = {X_1}^T\,\lambda_2\,\overline{X_2} = \lambda_2\left({X_1}^T\,\overline{X_2}\right)^T = \lambda_2\,\overline{X_2}^T\,X_1$$

Ainsi :

$$\lambda_1 \overline{X_2}^T X_1 = \lambda_2 \overline{X_2}^T X_1$$

Et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\overline{X_2}^T X_1 = 0$$

<u>En dimension infinie :</u>

Si $\hat{A}$ est un opérateur fonctionnel, donc un endomorphisme de E (resp F), ses valeurs propres et ses vecteurs propres sont ceux de cet endomorphisme. Ainsi, une fonction ψ non nulle est vecteur propre de $\hat{A}$ associée à une valeur propre λ si :

$$\hat{A}\,\psi = \lambda\,\psi$$

Ce qui signifie :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} : \hat{A}\,(\psi)(x) = \lambda\,\psi(x)$$

Propriété :

Soit $\widehat{A}$ un opérateur fonctionnel symétrique (resp hermitien).

Soit λ_1, λ_2 deux valeurs propres distinctes de $\widehat{A}$ et ψ_1, ψ_2 deux vecteurs propres non nuls respectivement associés. Alors ψ_1 et ψ_2 sont orthogonaux pour le produit scalaire associé, c'est-à-dire :

Pour $\widehat{A}$ symétrique :

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x)\, \psi_2(x)\, dx = 0$$

Pour $\widehat{A}$ hermitien :

$$(\psi_1, \psi_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x)\ \ \overline{\psi_2(x)}\, dx = 0$$

<u>Preuve :</u>

On montre tout d'abord que les valeurs propres d'un opérateur fonctionnel hermitien sont réelles.

Soit λ une valeur propre de $\hat{A}$ et ψ un vecteur propre non nul associé. Alors :

$$\hat{A}\,\psi = \lambda\,\psi$$

En prenant le conjugué :

$$\overline{\hat{A}\,\psi} = \bar{\lambda}\,\bar{\psi}$$

Ainsi :

$$\left(\hat{A}\,\psi, \psi\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)}\ \ \hat{A}\,\psi(x)\, dx = \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} |\,\psi(x)|^2\, dx$$

Or :

$$\left(\hat{A}\,\psi,\psi\right) = \overline{\left(\hat{A}\,\psi,\psi\right)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi(x)}\;\hat{A}\,\psi(x)dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\;\overline{\hat{A}\,\psi(x)}\;dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(x)\;\bar{\lambda}\,\bar{\psi}(x)dx$$

$$= \bar{\lambda}\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\psi(x)|^2\;dx$$

Or :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\,\psi(x)|^2\;dx \neq 0$$

Donc :

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

Preuve de l'autre propriété dans les cas d'un opérateur fonctionnel symétrique ou hermitien :

$$\hat{A}\,\psi_1 = \lambda_1\,\psi_1$$

$$\hat{A}\,\psi_2 = \lambda_2\,\psi_2$$

donc en prenant le conjugué :

$$\overline{\hat{A}\,\psi_2} = \lambda_2\,\overline{\psi_2}$$

Et d'une part :

$$\left(\hat{A}\,\psi_1,\psi_2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_2(x)}\;\hat{A}\,\psi_1(x)\;dx = \lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_2(x)}\;\;\psi_1(x)\;dx$$

D'autre part :

$$\left(\hat{A}\,\psi_1,\psi_2\right) = \overline{\left(\hat{A}\,\psi_2,\psi_1\right)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_1(x)}\;\hat{A}\,\psi_2(x)\;dx} = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x)\;\overline{\hat{A}\,\psi_2(x)}\;dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_1(x)\;\lambda_2\,\overline{\psi_2}(x)\;dx = \lambda_2\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_2(x)}\;\;\psi_1(x)\;dx$$

Ainsi :

$$\lambda_1\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_2(x)}\;\;\psi_1(x)\;dx = \lambda_2\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_2(x)}\;\;\psi_1(x)\;dx$$

Et comme $\lambda_1 \neq \lambda_2$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \overline{\psi_2(x)}\;\;\psi_1(x)\;dx = 0$$

7. **Diagonalisation des opérateurs symétriques ou hermitiens**