

Applications linéaires

I Introduction -définition

Dans toute la suite, on considère un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un vecteur $\vec{u}$ de ce plan peut alors être associé à un point M du plan et au vecteur de $\mathbb{R}^2$ formé par son couple de coordonnées (x, y) .

Présentons alors quelques transformations de référence sur les vecteurs de ce plan ainsi que leurs propriétés :

1) Symétries et projections dans un plan

Considérons deux droites Δ_1 et Δ_2 non confondues et passant par l'origine du repère. Notons $\overrightarrow{\Delta_1}$ et $\overrightarrow{\Delta_2}$ les droites vectorielles qui leur sont associées dans l'espace $\mathbb{V}$ formé par les vecteurs du plan. Nous avons alors :

$$\overrightarrow{\Delta_1} \oplus \overrightarrow{\Delta_2} = \mathbb{V}$$

Ainsi :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \exists ! (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in \overrightarrow{\Delta_1} \times \overrightarrow{\Delta_2} : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

La **symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{\Delta_1}$ parallèlement à $\overrightarrow{\Delta_2}$** est alors l'application s de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}$ définie par :

$$s(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

Notons qu'elle vérifie :

$$s(s(\vec{u})) = \vec{u}$$

soit en notant : $s(s(\vec{u})) = s^2(\vec{u})$ et $I_{\mathbb{V}}(\vec{u}) = \vec{u}$:

$$s^2 = I_{\mathbb{V}}$$

On dit alors de s qu'elle est **involutive**

La **projection vectorielle sur $\overrightarrow{\Delta_1}$ parallèlement à $\overrightarrow{\Delta_2}$** est l'application p de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}$ définie par :

$$p(\vec{u}) = \vec{u}_1$$

Notons qu'elle vérifie :

$$p(p(\vec{u})) = p(\vec{u})$$

soit :

$$p^2 = p$$

On dit alors de p qu'elle est **idempotente**

Considérons alors deux vecteurs quelconques $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et leurs décompositions sur $\vec{\Delta}_1$ et $\vec{\Delta}_2$, ainsi qu'un nombre réel α :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

$$\vec{v} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2$$

alors on a, d'une part :

$$\vec{u} + \vec{v} = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) + (\vec{u}_2 + \vec{v}_2)$$

avec : $\vec{u}_1 + \vec{v}_1 \in \vec{\Delta}_1$ et $\vec{u}_2 + \vec{v}_2 \in \vec{\Delta}_2$ donc :

$$s(\vec{u} + \vec{v}) = (\vec{u}_1 + \vec{v}_1) - (\vec{u}_2 + \vec{v}_2) = (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) + (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = s(\vec{u}) + s(\vec{v})$$

$$p(\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}_1 + \vec{v}_1 = p(\vec{u}) + p(\vec{v})$$

d'autre part :

$$\alpha \vec{u} = \alpha \vec{u}_1 + \alpha \vec{u}_2$$

avec : $\alpha \vec{u}_1 \in \vec{\Delta}_1$ et $\alpha \vec{u}_2 \in \vec{\Delta}_2$ donc :

$$s(\alpha \vec{u}) = \alpha \vec{u}_1 - \alpha \vec{u}_2 = \alpha (\vec{u}_1 - \vec{u}_2) = \alpha s(\vec{u})$$

$$p(\alpha \vec{u}) = \alpha \vec{u}_1 = \alpha p(\vec{u})$$

2) Rotations dans un plan :

Etant donné un vecteur quelconque $\vec{u}$ de $\mathbb{V}$, le plan étant supposé orienté par sa base orthonormée, et $\vec{v}$ le vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi/2$, la rotation vectorielle d'angle θ est l'application r de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}$ telle que :

$$r(\vec{u}) = \cos \theta \vec{u} + \sin \theta \vec{v}$$

Elle vérifie

$$r(\vec{u} + \vec{v}) = r(\vec{u}) + r(\vec{v})$$

$$r(\alpha \vec{u}) = \alpha r(\vec{u})$$

3) Homothéties dans un plan

Etant donné un vecteur quelconque $\vec{u}$ de $\mathbb{V}$, l'homothétie vectorielle de rapport k est l'application h de $\mathbb{V}$ dans $\mathbb{V}$ telle que :

$$h(\vec{u}) = k \vec{u}$$

Elle vérifie

$$h(\vec{u} + \vec{v}) = h(\vec{u}) + h(\vec{v})$$

$$h(\alpha \vec{u}) = \alpha h(\vec{u})$$

Toutes ces transformations présentent donc des propriétés analogues, à savoir :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{V}^2 : f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v})$$

$$\forall (\alpha, \vec{u}) \in \mathbb{V}^2 : f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u})$$

Notons alors que ce sont les propriétés caractéristiques d'une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = a x$ qui, rappelons le, a pour représentation graphique dans un repère orthogonal une droite passant par l'origine.

C'est pourquoi on qualifie d'application linéaire, toute application d'un espace vectoriel $\mathbb{V}$ dans un espace vectoriel $\mathbb{W}$ vérifiant les propriétés encadrées ci-dessus.

L'ensemble des applications linéaire d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$ dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{W}$ est noté $\mathcal{L}(\mathbb{V}, \mathbb{W})$. On peut alors le munir d'une opération interne d'addition et d'une opération externe de multiplication en faisant ainsi un $\mathbb{K}$ espace vectoriel.

$$f + g : \vec{u} \rightarrow f(\vec{u}) + g(\vec{u})$$

$$\alpha f : \vec{u} \rightarrow \alpha f(\vec{u})$$

A noter la propriétés suivant immédiate :

$$f(\vec{o}_V) = \vec{o}_W$$

Preuve :

$$f(\vec{o}_V + \vec{o}_V) = f(\vec{o}_V)$$

$$f(\vec{o}_V) + f(\vec{o}_V) = f(\vec{o}_V)$$

$$f(\vec{o}_V) + f(\vec{o}_V) - f(\vec{o}_V) = f(\vec{o}_V) - f(\vec{o}_V)$$

$$f(\vec{o}_V) + \vec{o}_W = \vec{o}_W$$

$$f(\vec{o}_V) = \vec{o}_W$$

Une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel V dans lui-même est appelée endomorphisme de V

L'ensemble des endomorphismes d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel V est noté $\text{End}(V)$

Une application linéaire bijective d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel V dans lui-même est appelée automorphisme de V

L'ensemble des automorphismes d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel V est noté $\text{Aut}(V)$

II Endomorphismes de référence

1) Symétries et projections vectorielles

Dans toute la suite, V désigne un espace vectoriel quelconque et V_1 et V_2 deux sous espaces supplémentaires., soit : $V_1 \oplus V_2 = V$. Ainsi :

$$\forall \vec{u} \in V : \exists ! (\vec{u}_1, \vec{u}_2) \in V_1 \times V_2 : \vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

La **symétrie vectorielle par rapport à V_1 parallèlement à V_2** est alors l'application s de V dans V définie par :

$$s(\vec{u}) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$$

La **projection vectorielle sur V_1 parallèlement à V_2** est l'application p de V dans V définie par :

$$p(\vec{u}) = \vec{u}_1$$

Propriétés :

Une symétrie vectorielle est une application linéaire et elle est involutive ($s^2 = I_V$). Réciproquement, toute application linéaire involutive est une symétrie vectorielle.

Une projection vectorielle est une application linéaire et elle est idempotente ($p^2 = p$). Réciproquement, toute application linéaire idempotente, appelée projecteur, est une projection vectorielle

Preuves :

La démonstration du caractère linéaire se calque sur celle faite pour les symétries et les projections vectorielles du plan, de même pour le caractère involutif d'une symétrie et le caractère idempotent d'une projection. Reste à voir les réciproques.

a) Preuve de : Tout endomorphisme involutif est une symétrie

Soit s un endomorphisme involutif, vérifiant donc : $\forall \vec{u} \in V : s(s(\vec{u})) = \vec{u}$

Introduisons les deux sous ensembles de V suivant :

$$V_1 = \{\vec{u} \in V : s(\vec{u}) = \vec{u}\}$$

$$V_2 = \{\vec{u} \in V : s(\vec{u}) = -\vec{u}\}$$

Il est aisé de vérifier que V_1 et V_2 sont deux sous espaces vectoriels de V . Montrons qu'ils sont supplémentaires. On a en effet :

$$\forall \vec{u} \in V : \vec{u} = \frac{1}{2}(\vec{u} + s(\vec{u})) + \frac{1}{2}(\vec{u} - s(\vec{u}))$$

Soit :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

en posant :

$$\vec{u}_1 = \frac{1}{2}(\vec{u} + s(\vec{u}))$$

$$\vec{u}_2 = \frac{1}{2}(\vec{u} - s(\vec{u}))$$

Or :

$$s(\vec{u}_1) = s\left(\frac{1}{2}(\vec{u} + s(\vec{u}))\right) = \frac{1}{2}(s(\vec{u}) + s(s(\vec{u}))) = \frac{1}{2}(s(\vec{u}) + \vec{u}) = \vec{u}_1$$

donc $\vec{u}_1 \in \mathbb{V}_1$

$$s(\vec{u}_2) = s\left(\frac{1}{2}(\vec{u} - s(\vec{u}))\right) = \frac{1}{2}(s(\vec{u}) - s(s(\vec{u}))) = \frac{1}{2}(s(\vec{u}) - \vec{u}) = -\frac{1}{2}(\vec{u} - s(\vec{u})) = -\vec{u}_2$$

donc $\vec{u}_2 \in \mathbb{V}_2$

D'où : $\mathbb{V}_1 + \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$

Montrons alors que la somme est directe :

Soit $\vec{u} \in \mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2$ alors : $s(\vec{u}) = \vec{u}$ et $s(\vec{u}) = -\vec{u}$ donc : $\vec{u} = -\vec{u}$ d'où : $\vec{u} = \vec{0}$

On en déduit : $\mathbb{V}_1 \cap \mathbb{V}_2 = \{\vec{0}\}$ donc : $\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$

Or : $s(\vec{u}) = s(\vec{u}_1) + s(\vec{u}_2) = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$

s est donc la symétrie vectorielle par rapport à $\mathbb{V}_1$ parallèlement à $\mathbb{V}_2$

b) Preuve de : Tout endomorphisme idempotent est une projection

Soit p un endomorphisme idempotent, vérifiant donc : $\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : p(p(\vec{u})) = \vec{u}$

Introduisons les deux sous ensembles de $\mathbb{V}$ suivant :

$$\mathbb{V}_1 = \{\vec{u} \in \mathbb{V} : p(\vec{u}) = \vec{u}\}$$

$$\mathbb{V}_2 = \{\vec{u} \in \mathbb{V} : p(\vec{u}) = \vec{0}\}$$

IL est aisé de vérifier que $\mathbb{V}_1$ et $\mathbb{V}_2$ sont deux sous espaces vectoriels de $\mathbb{V}$. Montrons qu'ils sont supplémentaires. On a en effet :

$$\forall \vec{u} \in \mathbb{V} : \vec{u} = p(\vec{u}) + (\vec{u} - p(\vec{u}))$$

Soit :

$$\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2$$

en posant :

$$\vec{u_1} = p(\vec{u})$$

$$\vec{u_2} = \vec{u} - p(\vec{u})$$

Or :

$$p(\vec{u_1}) = p(p(\vec{u})) = p(\vec{u}) = \vec{u_1}$$

donc $\vec{u_1} \in V_1$

$$p(\vec{u_2}) = p(\vec{u} - p(\vec{u})) = p(\vec{u}) - p(p(\vec{u})) = p(\vec{u}) - p(\vec{u}) = \vec{0}$$

donc $\vec{u_2} \in V_2$

D'où : $V_1 + V_2 = V$

Montrons alors que la somme est directe :

Soit $\vec{u} \in V_1 \cap V_2$ alors : $p(\vec{u}) = \vec{u}$ et $p(\vec{u}) = \vec{0}$ donc : $\vec{u} = \vec{0}$

On en déduit : $V_1 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$ donc : $V_1 \oplus V_2 = V$

$$\text{Or : } p(\vec{u}) = p(\vec{u_1}) + p(\vec{u_2}) = \vec{u_1} + \vec{0} = \vec{u_1}$$

p est donc la projection vectorielle sur V_1 parallèlement à V_2

2) Homothéties vectorielles

V désignant un $\mathbb{K}$ espace vectoriel quelconque et k un élément de $\mathbb{K}$, l'homothétie vectorielle de rapport k est l'application h de V dans V définie par :

$$h(\vec{u}) = k \vec{u}$$

Trois cas particuliers se présentent :

- Pour $k = 0$, h est l'application nulle
- Pour $k = 1$, h est l'application identité de V notée : I_V
- Pour $k = -1$, h est la symétrie vectorielle par rapport à $\{\vec{0}\}$ parallèlement à V

III Noyau-image-rang d'une application linéaire

Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$ dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{W}$.

1) Noyau de l'application linéaire

On appelle noyau de f l'ensemble noté $N(f)$ ou $\text{Ker}(f)$ ((Kern = noyau en allemand) défini par :

$$N(f) = \{\vec{u} \in \mathbb{V} : f(\vec{u}) = \vec{0}\} = f^{-1}(\{\vec{0}\})$$

Autrement dit, le noyau est l'ensemble des antécédents par f du vecteur nul de $\mathbb{W}$.

Le noyau d'une application linéaire est un sous espace vectoriel de l'ensemble de départ.

Preuve :

- Stabilité de $N(f)$ pour l'addition :

Soit $(\vec{u}, \vec{v}) \in N(f)^2$, alors $f(\vec{u} + \vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}) = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ donc $\vec{u} + \vec{v} \in N(f)$

- Stabilité de $N(f)$ pour la multiplication externe :

Soit $(\vec{u}, \alpha) \in N(f) \times \mathbb{K}$, alors $f(\alpha \vec{u}) = \alpha f(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $\alpha \vec{u} \in N(f)$

2) Image de l'application linéaire

On appelle image de f l'ensemble noté $\text{Im}(f)$ défini par :

$$\text{Im}(f) = \{\vec{v} \in \mathbb{W} : \exists \vec{u} \in \mathbb{V} : \vec{v} = f(\vec{u})\} = f(\mathbb{V})$$

Autrement dit, l'image est l'ensemble formé par les images des vecteurs de l'ensemble de départ.

L'image d'une application linéaire est un sous espace vectoriel de l'ensemble d'arrivée.

Preuve :

- Stabilité de $\text{Im}(f)$ pour l'addition :

Soit $(\vec{v}, \vec{v}') \in \text{Im}(f)^2$, alors : $\exists (\vec{u}, \vec{u}') \in \mathbb{V}^2 : \vec{v} = f(\vec{u})$ et $\vec{v}' = f(\vec{u}')$

donc : $\vec{v} + \vec{v}' = f(\vec{u}) + f(\vec{u}') = f(\vec{u} + \vec{u}')$

d'où : $\vec{v} + \vec{v}' \in \text{Im}(f)$

- Stabilité de $\text{Im}(f)$ pour la multiplication externe :

Soit $(\vec{u}, \alpha) \in \text{Im}(f) \times \mathbb{K}$, alors : $\exists \vec{u} \in \mathbb{V} : \vec{v} = f(\vec{u})$

donc $\alpha \vec{v} = \alpha f(\vec{u}) = f(\alpha \vec{u})$

d'où : $\alpha \vec{v} \in \text{Im}(f)$

Exemples de Noyau et d'Image :

Soit $\mathbb{V}$ un espace vectoriel quelconque et $\mathbb{V}_1$ et $\mathbb{V}_2$ deux sous espaces supplémentaires, à savoir :

$$\mathbb{V}_1 \oplus \mathbb{V}_2 = \mathbb{V}$$

Soit p la projection vectorielle sur $\mathbb{V}_1$ parallèlement à $\mathbb{V}_2$ alors :

$$N(p) = \mathbb{V}_2$$

$$\text{Im}(p) = \mathbb{V}_1$$

Ainsi noyau et image d'une projection sont supplémentaires

$$\text{Im}(p) \oplus N(p) = \mathbb{V}$$

Soit s la symétrie vectorielle par rapport à $\mathbb{V}_1$ parallèlement à $\mathbb{V}_2$ alors :

$$N(s) = \{\vec{0}\}$$

$$\text{Im}(s) = \mathbb{V}$$

Ainsi noyau et image d'une symétrie sont supplémentaires

$$\text{Im}(s) \oplus N(s) = \mathbb{V}$$

Notons que dans les deux exemples précédents, nous avons, lorsque $\mathbb{V}$ est de dimension finie :

$$\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{N}(f)) = \dim(\mathbb{V})$$

Ce résultat va se généraliser sous la forme du théorème du rang.

IV Le théorème du rang

Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension finie dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{W}$ quelconque, alors :

$\text{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{W}$ de dimension finie, dont la dimension est appelée rang de f et :

$$\dim(\text{Im}(f)) + \dim(\text{N}(f)) = \dim(\mathbb{V})$$

Preuve de $\text{Im}(f)$ est un sous espace vectoriel de $\mathbb{W}$ de dimension finie:

Soit $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ une base de $\mathbb{V}$ et $\vec{v} \in \text{Im}(f)$ alors :

$$\exists \vec{u} \in \mathbb{V} : \vec{v} = f(\vec{u})$$

et :

$$\exists! (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \vec{u} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n$$

donc :

$$\vec{v} = f(x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n) = x_1 f(\vec{e}_1) + x_2 f(\vec{e}_2) + \dots + x_n f(\vec{e}_n)$$

d'où :

$(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$ est une partie génératrice de base de $\text{Im}(f)$. Il est donc possible d'en extraire une sous partie libre et génératrice. Ainsi $\text{Im}(f)$ est de dimension finie.

Notons au passage que :

$$\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), \dots, f(\vec{e}_n))$$

Preuve de l'égalité sur les dimensions :

Soit $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p)$ une base du noyau de f . Cette base peut alors être complétée en une base $(\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p, \vec{b}_{p+1}, \dots, \vec{b}_n)$ de $\mathbb{V}$.

Soit alors $\vec{v} \in \text{Im}(f)$ alors :

$$\exists (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n : \vec{v} = f(x_1 \vec{b}_1 + x_2 \vec{b}_2 + \dots + x_p \vec{b}_p + x_{p+1} \vec{b}_{p+1} + \dots + x_n \vec{b}_n)$$

soit :

$$\vec{v} = x_1 f(\vec{b}_1) + x_2 f(\vec{b}_2) + \dots + x_p f(\vec{b}_p) + x_{p+1} f(\vec{b}_{p+1}) + \dots + x_n f(\vec{b}_n)$$

$$\vec{v} = x_1 \vec{0} + x_2 \vec{0} + \dots + x_p \vec{0} + x_{p+1} f(\vec{b}_{p+1}) + \dots + x_n f(\vec{b}_n)$$

$$\vec{v} = x_{p+1} f(\vec{b}_{p+1}) + \dots + x_n f(\vec{b}_n)$$

$(f(\vec{b}_{p+1}), \dots, f(\vec{b}_n))$ est donc une partie génératrice de $\text{Im}(f)$. Montrons qu'elle est libre. Partons pour cela de la nullité d'une combinaison linéaire :

$$x_{p+1} f(\vec{b}_{p+1}) + \dots + x_n f(\vec{b}_n) = \vec{0} \Rightarrow f(x_{p+1} \vec{b}_{p+1} + \dots + x_n \vec{b}_n) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x_{p+1} \vec{b}_{p+1} + \dots + x_n \vec{b}_n \in N(f)$$

$$\Rightarrow x_{p+1} \vec{b}_{p+1} + \dots + x_n \vec{b}_n = \vec{0}$$

$$\Rightarrow x_{p+1} = \dots = x_n = 0$$

$(f(\vec{b}_{p+1}), \dots, f(\vec{b}_n))$ est donc libre et génératrice, c'est donc une base de $\text{Im}(f)$. Par conséquent :

$$\dim(\text{Im}(f)) + \dim(N(f)) = (n - p) + p = n = \dim(\mathbb{V})$$

V Caractérisation de l'injectivité et de la surjectivité d'une application linéaire

Soit f une application linéaire d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$ dans un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{W}$. Alors :

$$\mathbf{f \text{ injective} \Leftrightarrow N(f) = \{\vec{0}\}}$$

Preuve :

($\Rightarrow$) Supposons f injective. Soit $\vec{u} \in N(f)$ alors $f(\vec{u}) = \vec{0}$ donc $f(\vec{u}) = f(\vec{0})$ d'où $\vec{u} = \vec{0}$

Ainsi : $N(f) \subset \{\vec{0}\}$ mais puisque $\{\vec{0}\} \subset N(f)$ il vient : $N(f) = \{\vec{0}\}$

($\Leftarrow$) Supposons $N(f) = \{\vec{0}\}$ alors on a : $\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathbb{V}^2$:

$$f(\vec{u}) = f(\vec{v}) \Rightarrow f(\vec{u}) - f(\vec{v}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow f(\vec{u} - \vec{v}) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} \in N(f)$$

$$\Rightarrow \vec{u} - \vec{v} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \vec{u} = \vec{v}$$

$$\mathbf{f \text{ surjective} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{W}}$$

Preuve :

Rappelons que : $f(\mathbb{V}) = \text{Im}(f)$. Ainsi :

$$f \text{ surjective} \Leftrightarrow f(\mathbb{V}) = \mathbb{W} \Leftrightarrow \text{Im}(f) = \mathbb{W}$$

Cas d'un endomorphisme en dimension finie :

Soit f un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ espace vectoriel $\mathbb{V}$ de dimension finie. Alors :

$f \text{ injective} \Leftrightarrow f \text{ surjective} \Leftrightarrow f \text{ bijective}$
--

Un endomorphisme bijectif est, rappelons le, appelé automorphisme

Preuve : f injective $\Rightarrow f$ surjective

Supposons f injective alors $N(f) = \{\vec{0}\}$ et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(f)) + \dim(N(f)) = \dim(\mathbb{V})$$

On en déduit :

$$\dim(\text{Im}(f)) = \dim(\mathbb{V})$$

D'où

$$\text{Im}(f) = \mathbb{V}$$

f est donc surjective

Preuve : f surjective $\Rightarrow f$ injective

Supposons f surjective alors : $\text{Im}(f) = \mathbb{V}$ et d'après le théorème du rang :

$$\dim(\text{Im}(f)) + \dim(N(f)) = \dim(\mathbb{V})$$

On en déduit :

$$\dim(N(f)) = 0$$

D'où

$$N(f) = \{\vec{0}\}$$

f est donc injective

Exemples d'automorphismes :

$\mathbb{V}$ étant un plan vectoriel, les symétries par rapport à une droite parallèlement à une autre sont des automorphismes du plan, tout comme, les rotations vectorielles et les homothéties vectorielles de rapport non nul.

VI Applications linéaires et résolution d'un système d'équations linéaires

1) Système à deux équations et deux inconnues

Preliminaire :

Soit un système à deux équations et deux inconnues, comme par exemple :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases}$$

Considérons l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ formé des vecteurs-colonne à deux lignes. Le système se réécrit alors sous la forme équivalente.

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Autrement dit, il existe un couple (x, y) de réels solutions du système équivaut à dire que le vecteur -colonne $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ est combinaison linéaire des vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ et l'existence d'une solution unique est conditionnée par le fait que ces deux vecteurs forment une base, donc, soient libres, car $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ est de dimension 2.

Considérons alors, l'application f de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Cette application est linéaire car :

$$\begin{aligned}
f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right] &= f\left[\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}\right] \\
&= (x+x') \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (y+y') \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2(x+x') \\ 3(x+x') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5(y+y') \\ -4(y+y') \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x+2x' \\ 3x+3x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5y+5y' \\ -4y-4y' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2x \\ 3x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x' \\ 3x' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5y \\ -4y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5y' \\ -4y' \end{pmatrix} \\
&= x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} + x' \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y' \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] + f\left[\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

Et :

$$\begin{aligned}
f\left[\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right] &= f\left[\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}\right] \\
&= (\alpha x) \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + (\alpha y) \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\alpha x \\ 3\alpha x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5\alpha y \\ -4\alpha y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\alpha x + 5\alpha y \\ 3\alpha x - 4\alpha y \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \alpha(2x + 5y) \\ \alpha(3x - 4y) \end{pmatrix} \\
&= \alpha \begin{pmatrix} 2x + 5y \\ 3x - 4y \end{pmatrix} \\
&= \alpha f\left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right]
\end{aligned}$$

Nous pouvons alors réinterpréter le système de la façon suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 4y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in f^{-1}\left[\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}\right]$$

Autrement dit, la ou les solutions du système est ou sont le ou les antécédents de $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$

Considérons alors le système homogène associé :

$$\begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$$

Nous avons :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in f^{-1} \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = N(f)$$

Les solutions de ce système sont donc celles pour lesquelles la colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est dans le noyau de f

En l'occurrence, la résolution de ce système conduit à l'unique solution $(0, 0)$

Or le système homogène s'écrit également sous la forme :

$$x \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nous voyons donc que le fait que le noyau se réduise à la colonne nulle fait que les vecteurs colonnes $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}$ forment un système libre donc une base de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ ce qui fait que f engendre tous les vecteurs colonnes de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$, donc est surjective, et donc que son rang est égal à 2.

On retrouve cela avec le théorème du rang :

$$\text{rang}(f) + \dim N(f) = \dim \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) = 2$$

En particulier donc, le vecteur-colonne $\begin{pmatrix} 9 \\ 2 \end{pmatrix}$ admet au moins un antécédent, et comme f est injective, cet antécédent est unique.

Généralité :

Soit un système à deux équations et deux inconnues général :

$$\begin{cases} ax + cy = u \\ bx + dy = v \end{cases}$$

Associons lui l'application linéaire f de $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{21}(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

Nous avons alors :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{cases} ax + cy = u \\ bx + dy = v \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in f^{-1} \left[\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \right]$$

1^{er} cas : $N(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \Leftrightarrow ad - bc \neq 0$

f est alors injective et puisque f est un endomorphisme, f est bijective donc :

$$\forall \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) : \exists ! \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

Le système admet donc une solution unique (x, y) quel que soit le vecteur second membre $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

2^{ème} cas : $\dim N(f) = 1$

Notons $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ une base du noyau

Le théorème du rang indique alors :

$$\dim \text{Im}(f) + \dim N(f) = \dim \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) = 2$$

Donc :

$$\dim \text{Im}(f) = 1$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

a) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \notin \text{Im}(f)$

Dans ce cas le système n'a pas de solution

b) $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$

Alors :

$$\exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = f \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right]$$

Et

$$\begin{aligned} \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{21}(\mathbb{R}) : f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\Leftrightarrow f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] = f \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] \\ &\Leftrightarrow f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right] - f \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in N(f) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

Les couples (x, y) solutions du système sont donc les couples définis par l'ensemble :

$$\{(x, y) = (x_0 + k x_1, y_0 + k y_1) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

Remarque :

Lorsque le système admet au moins une solution, Il y a une grande parenté avec la résolution des équations différentielles linéaires traitées dans un autre fichier. En effet, les solutions du système sont alors la somme d'une solution particulière du système avec second membre et de la solution générale du système homogène associé (sans second membre) qui correspond au noyau de l'application linéaire associée.

2) Système à trois équations et trois inconnues

Le traitement va être analogue à celui du cas précédent.

Soit un système à trois équations et trois inconnues général :

$$\begin{cases} a x + a' y + a'' z = u \\ b x + b' y + b'' z = v \\ c x + c' y + c'' z = w \end{cases}$$

Associons lui l'application linéaire f de $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{31}(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow x \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$$

Nous avons alors :

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{cases} a x + a' y + a'' z = u \\ b x + b' y + b'' z = v \\ c x + c' y + c'' z = w \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in f^{-1} \left[\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \right]$$

$$\underline{1^{er} \text{ cas}} : N(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

f est alors injective et puisque f est un endomorphisme, f est bijective donc :

$$\forall \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : \exists ! \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right]$$

Le système admet donc une solution unique (x, y, z) quelquesoit le vecteur second membre $\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$

2^{ème} cas : $\dim N(f) = 1$

Notons $\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$ une base du noyau

Le théorème du rang indique alors :

$$\dim \text{Im}(f) + \dim N(f) = \dim \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) = 3$$

Donc :

$$\dim \text{Im}(f) = 2$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \notin \text{Im}(f)$$

Dans ce cas le système n'a pas de solution

$$\text{b) } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$$

Alors :

$$\exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = f \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right]$$

Et

$$\begin{aligned} \forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} &\Leftrightarrow f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = f \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right] \\ &\Leftrightarrow f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] - f \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in N(f)$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

Les triplets (x, y, z) solutions du système sont donc les triplets définis par l'ensemble :

$$\{(x, y, z) = (x_0 + k x_1, y_0 + k y_1, z_0 + k z_1) \mid k \in \mathbb{R}\}$$

3^{ème} cas : $\dim N(f) = 2$

Notons $\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right)$ une base du noyau

Le théorème du rang indique alors :

$$\dim \text{Im}(f) + \dim N(f) = \dim \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) = 3$$

Donc :

$$\dim \text{Im}(f) = 1$$

Deux cas peuvent alors se présenter :

$$\text{a) } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \notin \text{Im}(f)$$

Dans ce cas le système n'a pas de solution

$$\text{b) } \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \in \text{Im}(f)$$

Alors :

$$\exists \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = f \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right]$$

Et, en raccourcissant le traitement, analogue au précédent :

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \Leftrightarrow f \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] = f \left[\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\Leftrightarrow \exists (k, q) \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Les triplets (x, y, z) solutions du système sont donc les triplets définis par l'ensemble :

$$\{(x, y, z) = (x_0 + k x_1 + q x_2, y_0 + k y_1 + q y_2, z_0 + k z_1 + q z_2) \mid (k, q) \in \mathbb{R}^2\}$$

3) Système à n équations et n inconnues, rang du système

Le traitement est analogue aux deux précédents. Nous ne reprendrons pas les démonstrations mais seulement les résultats.

Soit un système à n équations et n inconnues général :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Associons lui l'application linéaire f de $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n1}(\mathbb{R})$ suivante :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \rightarrow x \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{pmatrix} + \dots + y \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$$

Nous avons alors :

$$\forall (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in f^{-1} \left[\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right]$$

La résolution du système se fait alors en déterminant le noyau de f par résolution du système homogène associé :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Soit alors une base du noyau de dimension m :

$$\begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} c_{1m} \\ c_{2m} \\ \vdots \\ c_{nm} \end{pmatrix}$$

Alors, ou bien le système ne possède aucune solution, ou bien il en possède au moins une que nous noterons :

$$\begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix}$$

Les n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ solutions du système sont alors ceux dont les vecteurs colonnes correspondants sont définis par l'ensemble :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{pmatrix} + k_1 \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{n1} \end{pmatrix} + k_2 \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{n2} \end{pmatrix} + \dots + k_m \begin{pmatrix} c_{1m} \\ c_{2m} \\ \vdots \\ c_{nm} \end{pmatrix} \quad (k_1, k_2, \dots, k_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

On appelle rang du système, le rang de l'application linéaire associée. C'est donc la dimension de l'espace vectoriel engendré par les vecteurs-colonne du système et il est égal, d'après le théorème du rang, à $(n - m)$

Cette description des systèmes à l'aide de vecteurs-colonne est le point de départ de la définition de tableaux appelés matrices, lesquels vont générer une nouvelle algèbre incontournable dans tous les domaines de la physique et qui s'appelle algèbre matricielle. C'est l'objet du prochain fichier que de les aborder. Mais le lecteur pourra consulter le fichier « Diagonalisation des matrices et analyse modale » pour voir une autre justification de l'introduction de ces objets.

4) Méthode pratique de résolution sur un exemple:

Soit le système à trois équations et trois inconnues suivant :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 2x - y + 3z = 6 \\ 3x + 5z = 11 \end{cases}$$

Appliquons la méthode de Gauss que nous décrirons dans un fichier ultérieur.

1^{ère} étape :

On conserve la première équation qualifiée de ligne pivot.

On remplace la seconde par une combinaison de la première et de la seconde avec les coefficients -2 et 1

On remplace la troisième par une combinaison de la première et de la troisième avec les coefficients -3 et 1

On obtient le système équivalent :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -3y - z = -4 \\ -3y - z = -4 \end{cases}$$

Qui équivaut au système :

$$\begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ -3y - z = -4 \end{cases}$$

Soit en choisissant y comme paramètre :

$$\begin{cases} x = 5 - y - 2(4 - 3y) \\ z = 4 - 3y \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} x = -3 + 5y \\ z = 4 - 3y \end{cases}$$

Les solutions de système sont donc les triplets (x, y, z) associés aux colonnes de l'ensemble :

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 + 5y \\ y \\ 4 - 3y \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} \mid y \in \mathbb{R} \right\}$$

Ce procédé présente l'avantage de faire apparaître une base du noyau dans le même temps, à savoir

le vecteur-colonne $\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Le noyau est donc de dimension 1. Le système est donc de rang 2, ce qui

signifie entre autre qu'un des trois vecteurs colonnes du système est combinaison linéaire des deux autres qui, eux, forment une partie libre.