Modèle discret de croissance de population

Ce modèle se rencontre sous le nom de modèle de Verhulst

1) Modélisation

Considérons une population dont l'évolution est suivie dans le temps par une suite V définie comme suit :

$V_0 =$ population à un instant initial pris comme référence

$V_n =$ population après n périodes de temps (n années par exemple)

Désignons respectivement par N_n et M_n les taux de natalité et de mortalité de la population sur la période où elle passe d'une valeur V_n à une valeur V_{n+1}.

Un modèle simple consiste à considérer avec des paramètres a, b, a', b' strictement positifs que N_n et M_n ont la forme :

$$N_n = b - a\, V_n$$

$$M_n = b' + a'\, V_n$$

Ces relations traduisent que le taux de natalité baisse et le taux de mortalité augmente (par prédation par exemple) avec l'augmentation de la population.

Or :

$$V_{n+1} - V_n = N_n\, V_n - M_n\, V_n$$

Soit

$$V_{n+1} = V_n\, (1 + N_n - M_n)$$

On en déduit la relation de récurrence vérifiée par V :

$$V_{n+1} = V_n\, (1 + b - b' - (a + a')\, V_n)$$

Soit, en posant : $k = 1 + b - b'$, $a + a' = c$, ces grandeurs étant positives par ailleurs :

$$V_{n+1} = V_n\, (k - c\, V_n)$$

D'où :

$$V_{n+1} = k\, V_n \left(1 - \frac{c}{k}\, V_n\right)$$

$$\frac{c}{k}\, V_{n+1} = k\, \frac{c}{k}\, V_n \left(1 - \frac{c}{k}\, V_n\right)$$

On introduit alors la suite U définie pour tout entier naturel par :

$$U_n = \frac{c}{k} V_n$$

Elle vérifie la relation de récurrence :

$$U_{n+1} = k\ \ U_n\ (1 - \ U_n)$$

2) <u>Résolution du modèle</u>

Considérons donc une suite U définie par une relation de récurrence de la forme :

$$U_{n+1} = k\ \ U_n\ (1 - \ U_n)$$

Avec :

$$0 < U_0 < 1$$

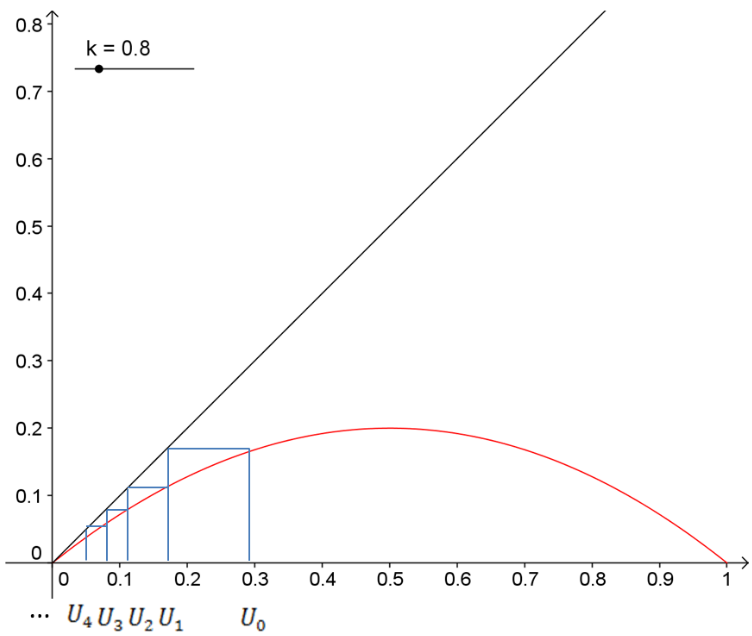
$$k > 0$$

Introduisons sur l'intervalle $[0; 1]$ la fonction :

$$f(x) = \ k\ \ x\ (1 - \ x)$$

Et procédons à quelques conjectures sur le comportement de U pour différentes valeurs de k

1er cas : La courbe de f coupe la droite $y = x$ en un seul point, l'origine du repère.



Dans ce cas on peut conjecturer que la suite est strictement décroissante et tend vers 0. La population tend donc à s'éteindre.

Prouvons la conjecture en commençant par définir les valeurs de k correspondant à ce cas. La condition est :

$$0 < f'(0) \leq 1$$

Or :

$$f'(x) = k - 2\,k\,x = k\,(1 - 2\,x)$$

Donc :

$$f'(0) = k$$

La condition devient :

$$\boxed{0 < k \leq 1}$$

Notons alors que le maximum de f est atteint en 0,5 et vaut :

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{k}{4} < \frac{1}{2}$$

Donc $U_1 = f(U_0) \in [0; 0{,}5]$

Ainsi , si $U_0 \in]0{,}5; 1]$ alors $U_1 \in [0; 0{,}5]$ .Prouvons alors la conjecture en démontrant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ dans le cas $U_0 \in [0; 0{,}5]$:

$$P(n) = \text{" } 0 < U_{n+1} < U_n \leq 0{,}5\text{"}$$

<u>Initialisation</u> :

Introduisons la fonction :

$$g(x) = f(x) - x \;=\; k\;\; x\,(1 - \;x) - x$$

De dérivée :

$$g'(x) = \;k - 1 - 2\,k\,x$$

On a alors sur $]0; 0{,}5]$:

$$g'(x) < 0$$

Donc g est strictement décroissante sur $[0; 0{,}5]$ et donc sur $]0; 0{,}5]$:

$$g(x) < g(0) = 0$$

Soit :

$$f(x) < x$$

D'où :

$$U_1 = f(U_0) < U_0$$

Donc $P(0)$ est vraie

<u>Hérédité</u> :

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ vraie, donc :

$$0 < U_{n+1} < U_n \ \leq 0{,}5$$

f étant strictement croissante sur $[0; 0{,}5]$ on en déduit :

$$f(0) < f(U_{n+1}) < f(U_n) \leq f(0{,}5)$$

Soit :

$$0 < U_{n+2} < U_{n+1} \ \leq 0{,}5$$

Donc $P(n+1)$ est vraie ce qui prouve la propriété

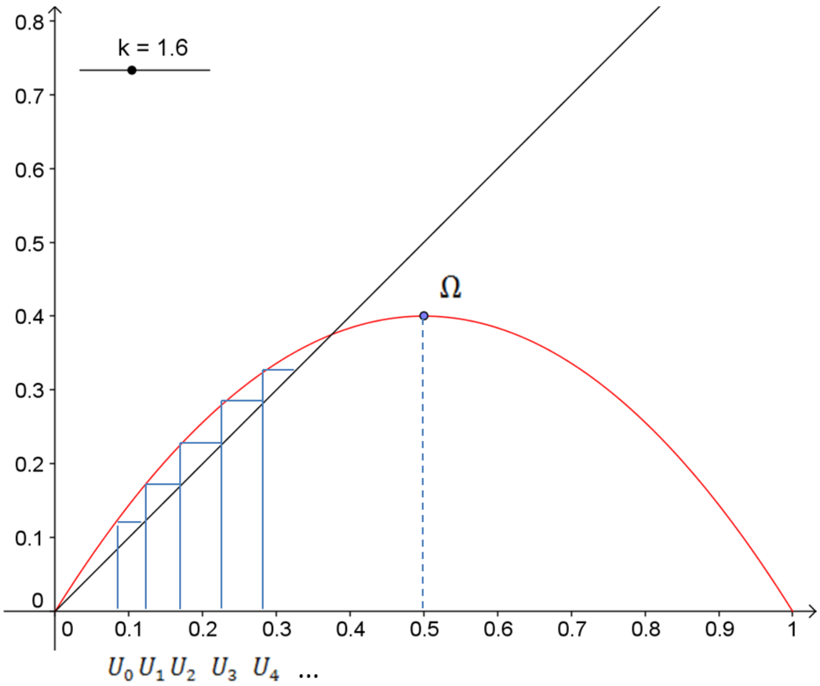
La suite U est donc strictement décroissante et minorée par 0. On en déduit qu'elle converge vers une limite L vérifiant :

$$f(L) = L, \quad 0 \leq L \leq 0{,}5$$

Donc, en le visualisant sur le graphique ou par résolution de $f(x) = x$:

$$L = 0$$

<u>2ème cas</u> : La courbe de f coupe la droite $y = x$ en deux points et le sommet de la parabole se trouve au dessous de (ou sur) la droite $y = x$



Dans ce cas, en notant L la solution non nulle de l'équation $f(x) = x$, on peut conjecturer que la suite est strictement croissante si $0 < U_0 < L$, strictement décroissante si $L < U_0 < 1$, constante égale à L si $U_0 = L$ et qu'elle tend vers L dans les trois cas. La population tend donc à se stabiliser.

Définissons les valeurs de k correspondant à ce cas. Les conditions sont :

$$f'(0) > 1\,, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) \leq \frac{1}{2}$$

Et deviennent :

$$k > 1\,, \qquad \frac{k}{4} \leq \frac{1}{2}$$

Soit :

$$\boxed{1 < k \leq 2}$$

Les conjectures se prouvent par une démarche analogue au 1er cas.

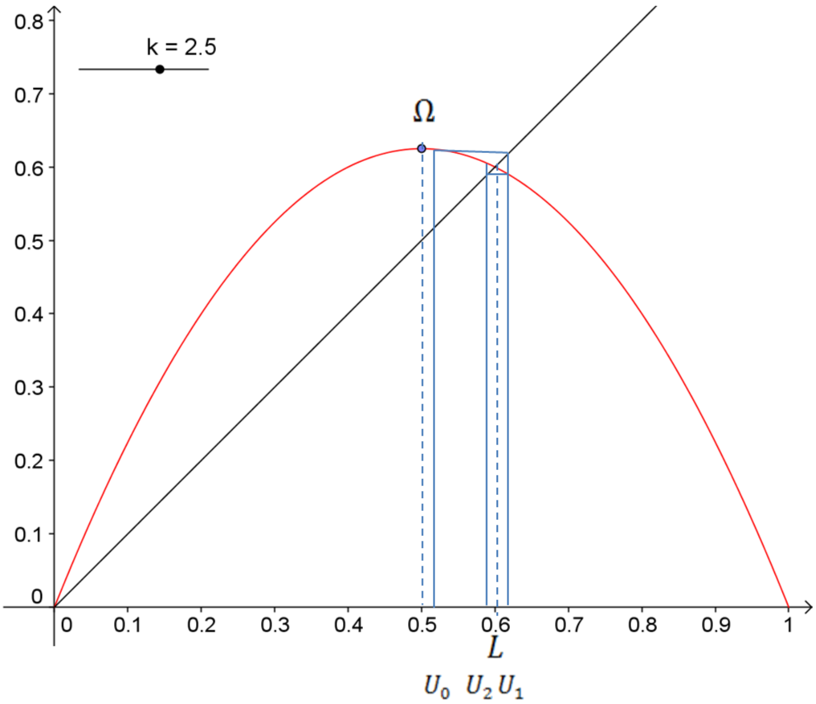
Notons que la valeur de L se détermine en résolvant :

$$k\ L\,(1 - L) = L$$

$$\Leftrightarrow\ k(1 - L) = 1$$

$$\Leftrightarrow\ L = 1 - \frac{1}{k}$$

$3^{ème}$ cas : La courbe de f coupe la droite $y = x$ en deux points et le sommet de la parabole se trouve strictement au dessus de la droite $y = x$ et, à l'abscisse non nulle L telle que $f(L) = L$ on a $-1 \leq f'(L) < 0$



Dans ce cas, on peut conjecturer que la suite tend vers L en oscillant atour de cette dernière valeur à partir 'un certain rang. La population tend donc à se stabiliser.

Définissons les valeurs de k correspondant à ce cas. Les conditions sont :

$$f'(0) > 1\,, \qquad f\left(\frac{1}{2}\right) > \frac{1}{2}\,, \qquad -1 \leq f'\left(1 - \frac{1}{k}\right) < 0$$

Et deviennent :

$$k > 1\,, \qquad \frac{k}{4} > \frac{1}{2} \quad , \quad -1 \leq k\left(1 - 2\left(1 - \frac{1}{k}\right)\right) < 0$$

La troisième condition se résout :

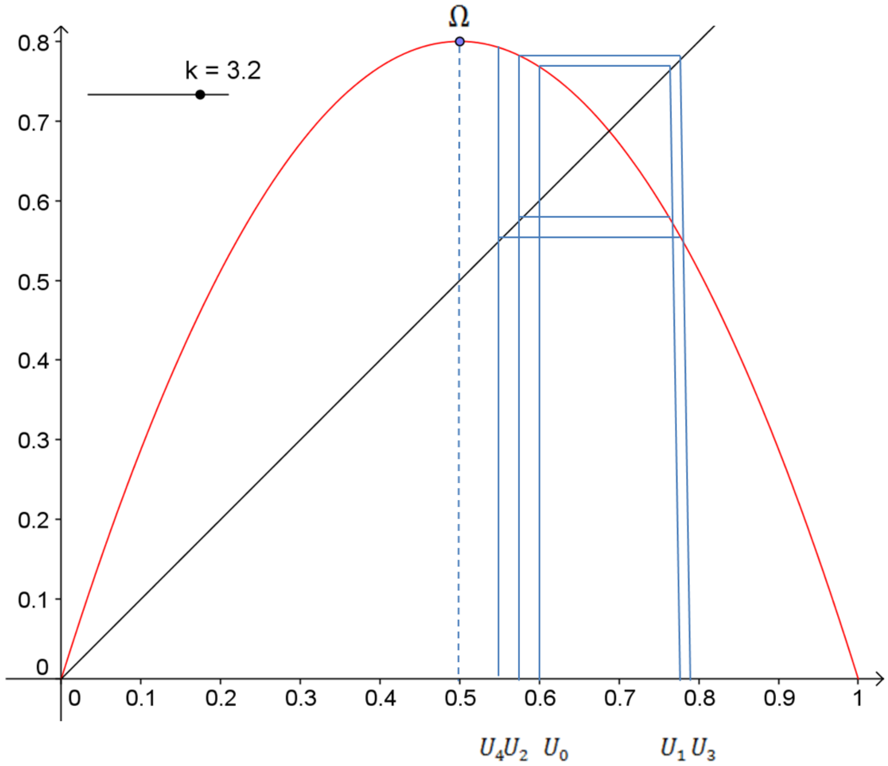
$$-1 \leq k\left(-1 + \frac{2}{k}\right) < 0$$

$$-1 \leq -k + 2 < 0$$

Soit finalement :

$$\boxed{2 < k \leq 3}$$

<u>4ème cas</u> : La courbe de f coupe la droite $y = x$ en deux points et le sommet de la parabole se trouve strictement au dessus de la droite $y = x$ et, à l'abscisse non nulle L telle que $f(L) = L$: $f'(L) < -1$



Au vu du graphique et du calcul des cents premiers termes, on peut conjecturer que la suite des termes de rang pair converge vers une limite $L_1 = 0{,}513 \ldots$ et la suite des termes de rang impair vers une limite $L_2 = 0{,}799 \ldots$

Cette conjecture est confirmée par la démarche suivante : Soit $V_n = U_{2n}$ la suite des termes de rang pair et $W_n = U_{2n+1}$ celle des termes de rang impaire.

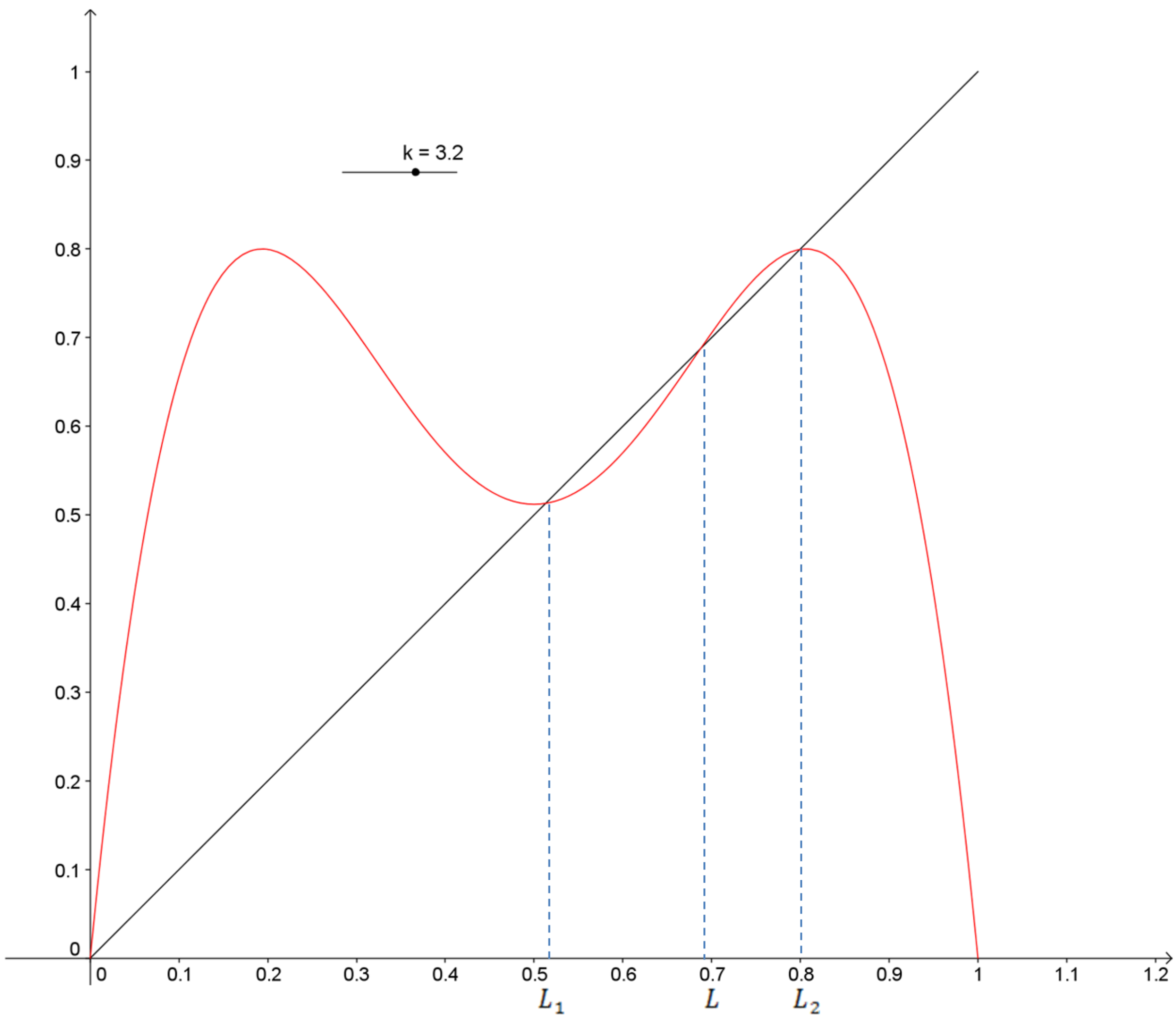
Ces deux suites vérifient la même relation de récurrence :

$$V_{n+1} = f\big(f(V_n)\big), \quad W_{n+1} = f\big(f(W_n)\big)$$

Posons :

$$g(x) = f\big(f(x)\big) = k\,\big(k\,x\,(1-x)\big)(1 - k\,x\,(1-x))$$

Le graphe de g est donné ci-dessous pour $k = 3{,}2$. Il fait apparaître deux solutions L_1, L_2, non nulles pour l'équation $g(x) = x$, en plus de la valeur L non nulle telle que $f(L) = L$.

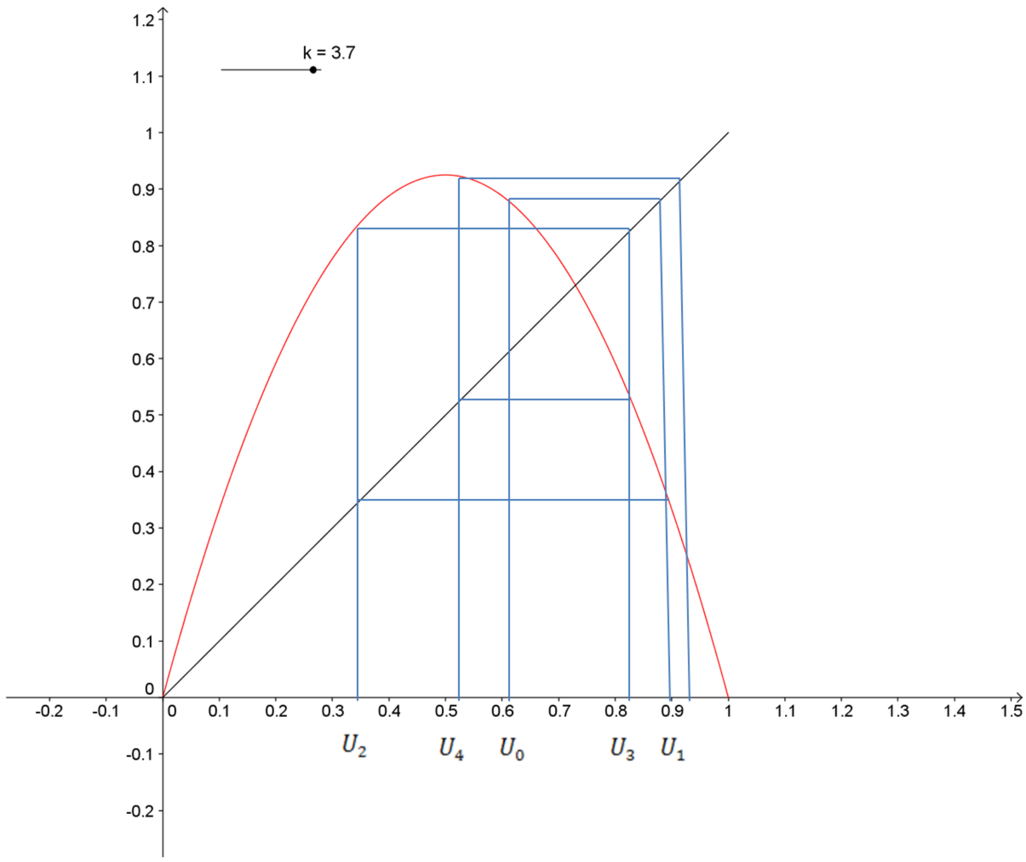


Ces solutions correspondent aux valeurs limites vers lesquelles semblent converger V_n et W_n au vu des trente premiers termes donnés par un tableur, pour différentes valeurs de U_0

0,6	0,7	0,8	0,66666667
0,768	0,672	0,512	0,71111111
0,5701632	0,7053312	0,7995392	0,65738272
0,784246801	0,66508511	0,51288406	0,72073818
0,541452019	0,7127901	0,7994688	0,6440789
0,794501536	0,6551052	0,51301899	0,73357206
0,522460304	0,72301561	0,79945762	0,62542109
0,798385711	0,64084493	0,51304043	0,74966256
0,515091096	0,73652066	0,79945583	0,60053954
0,799271228	0,62098553	0,51304386	0,76765376
0,513397542	0,75316001	0,79945554	0,57075668
0,799425619	0,59491203	0,51304441	0,78397917
0,513101756	0,77117346	0,7994555	0,54193865
0,799450701	0,56468786	0,51304449	0,79437168
0,513053689	0,78660954	0,79945549	0,52270501

0,799454724	0,53713591	0,51304451	0,79835034
0,513045979	0,79558696	0,79945549	0,51515863
0,799455368	0,52041072	0,51304451	0,79926469
0,513044745	0,79866689	0,79945549	0,51341006
0,799455471	0,51455389	0,51304451	0,79942454
0,513044547	0,79932219	0,79945549	0,51310381
0,799455487	0,51329993	0,51304451	0,79945053
0,513044516	0,79943396	0,79945549	0,51305402
0,79945549	0,51308577	0,51304451	0,7994547
0,51304451	0,79945204	0,79945549	0,51304603
0,79945549	0,51305112	0,51304451	0,79945536
0,51304451	0,79945494	0,79945549	0,51304475
0,79945549	0,51304557	0,51304451	0,79945547
0,51304451	0,7994554	0,79945549	0,51304455

En revanche pour $k = 3{,}7$ la simulation ne fait plus apparaître de convergence pour la suite des termes de rang pair et celle de rang impair. Le comportement de la suite U_n semble chaotique.



0,6	0,7	0,8
0,888	0,777	0,592
0,3679872	0,6411027	0,8936832
0,860518696	0,8513331	0,35155009
0,444097197	0,46829069	0,84346171
0,913437044	0,92127972	0,488526
0,2925583	0,26833657	0,92451288
0,765781383	0,7264286	0,2582186
0,663632949	0,73530134	0,70870449
0,825929754	0,72014314	0,76383701
0,531948243	0,74568689	0,66744311
0,921223446	0,70166042	0,82126237
0,268511991	0,77453237	0,54312481
0,726729216	0,64613831	0,91811893
0,734797291	0,8459813	0,27815328
0,721019859	0,48209868	0,74290091
0,744255821	0,92381431	0,70669684
0,704254647	0,2604113	0,76692274
0,770636145	0,71260984	0,66138332
0,653997485	0,75774911	0,82863507
0,837253666	0,67919197	0,52539628
0,50416187	0,80619388	0,92261361
0,924935912	0,57810765	0,26417163
0,256889043	0,90242702	0,71922443
0,706319131	0,32579422	0,7471804
0,76749994	0,81271368	0,69893684
0,660241993	0,56317758	0,7785693
0,829993263	0,9102318	0,63787684
0,52208645	0,30232653	0,85466291