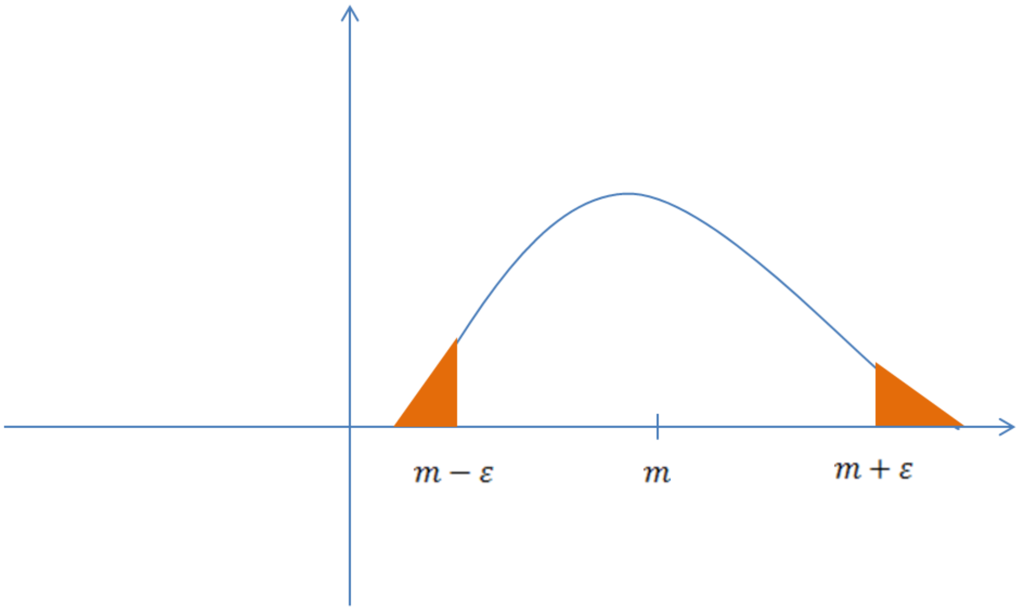
Inégalité de Markov

Etant donnée une variable aléatoire X d'espérance m et d'écart type σ, alors :

$$\boldsymbol{P}(|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}|>\varepsilon) \leq \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{\boldsymbol{\varepsilon}^2}$$



Illustrée pour une loi à densité, cette propriété traduit que les aires en orange sont inférieures ou égales à $\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$.

A titre d'exemple, nous avons lorsque X suit une loi normale :

$$\boldsymbol{P}(|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}|>1{,}96\,\boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{0{,}05}$$

L'inégalité de Markov quant à elle donnerait :

$$\boldsymbol{P}(|\boldsymbol{X}-\boldsymbol{m}|>1{,}96\,\boldsymbol{\sigma}) \leq \frac{\boldsymbol{\sigma}^2}{(\mathbf{1{,}96}\,\boldsymbol{\sigma})^2} \approx \mathbf{0{,}26}$$

Autrement dit, le renseignement fourni n'est pas très précis

<u>Preuve de l'inégalité de Markov</u> :

Introduisons la variable :

$$Z = \left(\frac{X-m}{\varepsilon}\right)^2$$

Alors, on a :

$$\frac{\sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{V(X)}{\varepsilon^2} = \frac{V(X-m)}{\varepsilon^2} = V\left(\frac{X-m}{\varepsilon}\right) = E\left[\left(\frac{X-m}{\varepsilon}\right)^2\right] = E(Z)$$

Or, si Z est une variable discrète prenant les valeurs $z_i \geq 0$:

$$P(Z > 1) = \sum_{z_i > 1} P(Z = z_i) \leq \sum_{z_i > 1} z_i \, P(Z = z_i) \leq E(Z)$$

On en déduit :

$$P\left(\left(\frac{X-m}{\varepsilon}\right)^2 > 1\right) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$

D'où :

$$P(|X-m| > \varepsilon) \leq \frac{\sigma^2}{\varepsilon^2}$$