1) <u>Préliminaire</u> : fonction convexe

On rappelle qu'une fonction f réelle à variable réelle est convexe sur un intervalle I si :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*\ , \forall\, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n, \forall\, (p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n :$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1 \Rightarrow$$

$$f(p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \dots + p_n\, x_n) \leq p_1\, f(x_1) + p_2\, f(x_1) + \dots + p_n\, f(x_n)$$

Montrer que si f est deux fois dérivable sur I alors f est convexe sur I si et seulement si :

$$\forall\, x \in I : f''(x) \geq 0$$

2) <u>Inégalité de Jensen :</u>

Soit X une variable aléatoire réelle discrète et f une fonction convexe sur un intervalle I contenant les valeurs possibles de la variable X, qu'on considérera comme étant formées par une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Alors si la variable $f(X)$ et la variable X admettent une espérance, on a :

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

<u>Application</u> : Montrer que si la variable X^4 admet une espérance alors les variables $X^2\ et\ |X|^3$ en admettent une aussi et :

$$E\left[X^2\right] \leq \sqrt{E[X^4]}$$

$$E\left[|X|^3\right] \leq E[X^4]^{\frac{4}{3}}$$

<u>Preuve</u> :

1) <u>Préliminaire</u> :

On suppose f deux fois dérivable et à dérivée positive ou nulle sur I. Montrons la propriété souhaitée par récurrence sur n.

<u>Initialisation</u> : pour $n = 2$

Soit $(x_1, x_2) \in I^2$ et $(p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x_1 < x_2$ et $p_1 + p_2 = 1$. Introduisons sur $[0,1]$ la fonction :

$$g(t) = f\big((1-t)\, x_1 + t\, x_2\big) - \big((1-t)\, f(x_1) + t\, f(x_2)\big)$$

Alors g est deux fois dérivable sur I et :

$$g'(t) = (x_2 - x_1)\ \ f'\big((1-t)\, x_1 + t\, x_2\big) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big)$$

$$g''(t) = (x_2 - x_1)^2\ \ f''\big((1-t)\, x_1 + t\, x_2\big) \geq 0$$

g' est donc croissante et d'après le théorème des accroissements finis, il existe $(c\ , d) \in\ ]x_1, x_2[^2$:

$$g'(0) = (x_2 - x_1)\ \ f'(x_1) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big) = (x_2 - x_1)\ \ \big(f'(x_1) - f'(c)\big) \leq 0$$

$$g'(1) = (x_2 - x_1)\ \ f'(x_2) - \big(f(x_2) - f(x_1)\big) = (x_2 - x_1)\ \ \big(f'(x_2) - f'(d)\big) \geq 0$$

Donc il existe $a \in\ ]0,1[$ tel que g décroit sur $[0, a]$ puis croit sur $[a, 1]$. Or : $g(0) = g(1) = 0$.

On en déduit que g est négative ou nulle sur $[0,1]$. En écrivant $g(p_2) \leq 0$, on obtient :

$$f(p_1\, x_1 + p_2\, x_2) \leq p_1\, f(x_1) + p_2\, f(x_1)$$

Hérédité :

Supposons la propriété établie au rang $n-1$ pour $n \geq 3$ alors soit $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in I^n$ et $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que $p_1 \neq 1$ et :

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 1$$

Alors :

$$f(p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \cdots + p_n\, x_n) = f\left(p_1\, x_1 + (p_2 + \cdots + p_n)\, \frac{p_2\, x_2 + \cdots + p_n\, x_n}{p_2 + \cdots + p_n}\right)$$

$$\leq p_1\, f(x_1) + (p_2 + \cdots + p_n)\, f\left(\frac{p_2\, x_2 + \cdots + p_n\, x_n}{p_2 + \cdots + p_n}\right)$$

Posons pour tout $i \in [\![2, n]\!]$:

$$q_i = \frac{p_i}{p_2 + \cdots + p_n}$$

Alors :

$$q_2 + \cdots + q_n = 1$$

Donc, l'hypothèse de récurrence s'applique :

$$f(q_2\, x_2 + \cdots + q_n\, x_n) \leq q_2\, f(q_2) + \cdots + q_n\, f(q_n)$$

Donc :

$$f(p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \cdots + p_n\, x_n) \leq p_1\, f(x_1) + (p_2 + \cdots + p_n)\left(q_2\, f(q_2) + \cdots + q_n\, f(q_n)\right)$$

Soit :

$$f(p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \cdots + p_n\, x_n) \leq p_1\, f(x_1) + p_2\, f(x_2) + \cdots + p_n\, f(x_n)$$

Ce qui prouve l'hérédité.

Réciproque :

Voir fichier sur la convexité des fonctions réelles sur ce même site.

2) Inégalité de Jensen

Notons pour tout $i \in \mathbb{N}$: $p_i = P(X = x_i)$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(p_1\, x_1 + p_2\, x_2 + \cdots + p_n\, x_n) \leq p_1\, f(x_1) + p_2\, f(x_2) + \cdots + p_n\, f(x_n)$$

Et en faisant tendre n vers l'infini :

$$f(E[X]) \leq E[f(X)]$$

Application :

On suppose que X^4 admet une espérance. Considérons sur $[0, +\infty[$ les fonctions :

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x^{\frac{4}{3}}$$

Elles dont toutes les deux convexes sur $[0, +\infty[$ qui est le domaine où se trouvent les valeurs possibles de $Y = X^2$ et $Z = |X|^3$.

On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$(p_1\, {x_1}^2 + p_2\, {x_2}^2 + \cdots + p_n\, {x_n}^2)^2 \leq p_1\, {x_1}^4 + p_2\, {x_2}^4 + \cdots + p_n\, {x_n}^4$$

$$(p_1\, |x_1|^3 + p_2\, |x_2|^3 + \cdots + p_n\, |x_n|^3)^{\frac{4}{3}} \leq p_1\, (|x_1|^3)^{\frac{4}{3}} + p_2\, (|x_2|^3)^{\frac{4}{3}} + \cdots + p_n\, (|x_n|^3)^{\frac{4}{3}}$$

Soit :

$$p_1\, {x_1}^2 + p_2\, {x_2}^2 + \cdots + p_n\, {x_n}^2 \leq \sqrt{p_1\, {x_1}^4 + p_2\, {x_2}^4 + \cdots + p_n\, {x_n}^4}$$

$$p_1\, |x_1|^3 + p_2\, |x_2|^3 + \cdots + p_n\, |x_n|^3 \leq (p_1\, {x_1}^4 + p_2\, {x_2}^4 + \cdots + p_n\, {x_n}^4)^{\frac{3}{4}}$$

Les suites des membres de droite étant convergentes, les séries à termes positifs des membres de gauches convergent et en passant à la limite on obtient :

$$E[X^2] \leq \sqrt{E[X^4]}$$

$$E[|X|^3] \leq E[X^4]^{\frac{4}{3}}$$