Inégalité de Young généralisée aux intégrales

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[0, a[, a > 0$ et telle que $f(0) = 0$, alors :

$$\forall\, x \in [0, a[\;:\; \int_0^x f(t)dt + \int_0^{f(x)} f^{-1}(t)dt = x\, f(x)$$

$$\forall\, (x, y) \in [0, a[\times [0, f(a)[\;:\; \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt \geq x\, y$$

Preuve :

Première propriété :

Considérons pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ une subdivision $(x_i)_{i=1,n}$ de l'intervalle $[0, x]$ en n parties égales. Alors $\big(y_i = f(x_i)\big)_{i=1,n}$ définit une subdivision de l'intervalle $[0, y]$, où $y = f(x)$. Transformons ensuite la somme des deux sommes de Riemann suivantes :

$$\frac{x}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} f^{-1}(y_i)\,(y_{i+1} - y_i) = \frac{x}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=0}^{n-1} x_i\,(y_{i+1} - y_i)$$

$$= \frac{x}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=0}^{n-1} x_i\, y_{i+1} - \sum_{i=0}^{n-1} x_i\, y_i = \frac{x}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}\, y_i - \sum_{i=0}^{n-1} x_i\, y_i$$

$$= \frac{x}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i + \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i-1} - x_i)\, y_i + x_{n-1}\, y_1 = \frac{x}{n}\sum_{i=0}^{n-1} y_i - \frac{x}{n}\sum_{i=1}^{n-1} y_i + x_{n-1}\, y_1$$

$$= x_{n-1}\, y_1 = \frac{n-1}{n}\, x\, f\left(\frac{x}{n}\right)$$

Or :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) = \int_0^x f(t)dt$$

Et pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$:

$$y_{i+1} - y_i = f(x_{i+1}) - f(x_i)$$

f étant continue sur $[0, x]$, elle y est également uniformément continue donc pour $\varepsilon > 0$:

$$\exists\, \alpha > 0 : \; \forall\, (t, t') \in [0, x]^2 : |t - t'| < \alpha \Rightarrow \; |f(t) - f(t')| < \varepsilon$$

Or :

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : n > n_0 \Rightarrow \; |x_{i+1} - x_i| = \frac{x}{n} < \alpha \Rightarrow |y_{i+1} - y_i| < \varepsilon$$

Le pas de la subdivision $(y_i)_{i=1,n}$ de $[0, y]$ tend bien vers 0. Ainsi :

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f^{-1}(y_i)\,(y_{i+1} - y_i) = \int_0^y f^{-1}(t)dt$$

De plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n-1}{n}\, x\, f\left(\frac{x}{n}\right) = x\, f(x)$$

Il en résulte la première propriété.

<u>Seconde propriété</u> :

Introduisons pour $y > 0$ fixé la fonction :

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt - x\, y$$

g est dérivable sur $[0, a[$ et :

$$g'(x) = f(x) - y$$

g est donc décroissante sur $[0, f^{-1}(y)]$ et croissante sur $[f^{-1}(y), a[$ donc elle présente un minimum en $f^{-1}(y)$ qui vaut :

$$g\big(f^{-1}(y)\big) = \int_0^{f^{-1}(y)} f(t)dt + \int_0^y f^{-1}(t)dt - f^{-1}(y)\, y$$

En appliquant la première propriété à f^{-1}, on obtient que ce minimum est nul, ce qui établit la seconde propriété.