

Inégalité de Chebyshev

Soit f et g deux fonctions réelles de la variable réelle intégrables au sens de Riemann et croissante sur un même intervalle $[a, b]$.

Montrer que :

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \geq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx$$

(On pourra utiliser l'inégalité de Chebyshev pour des sommes discrètes)

Réponse :

Considérons pour $n \in \mathbb{N}^*$ une subdivision régulière $(x_i)_{i=0,n}$ de l'intervalle $[a, b]$ en n parties égales. Alors on peut appliquer l'inégalité de Chebyshev sur les sommes de Riemann :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) g(x_i) \geq \frac{b-a}{n} \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \left(\sum_{i=0}^{n-1} g(x_i) \right)$$

Soit :

$$\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) g(x_i) \geq \frac{1}{b-a} \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i) \right) \left(\frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n-1} g(x_i) \right)$$

Par passage à la limite quand n tend vers l'infini, on obtient l'inégalité cherchée