Inégalité de Chebyshev

1) Soit $(a_1, a_2, b_1, b_2) \in \mathbb{R}^4$ tels que : $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$, développer :

$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2)$$

En déduire :

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \geq \frac{1}{2} (a_1 + a_2)(b_1 + b_2)$$

2) Généralisation : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que : $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$ et $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$, développer :

$$\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \right)$$

En déduire :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right)$$

Préciser la condition d'inégalité stricte

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ tels que : $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{i=1}^n a_i^k \geq \frac{1}{n^{k-1}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^k$$

En déduire la limite quand n tend vers l'infini de la suite :

$$\frac{1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^k}$$

Retrouver ce résultat en utilisant une intégrale et donner un équivalent à la suite précédente.

4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $(a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{3n}$ tels que : $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, $0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ et $0 \leq c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$. Etablir une minoration de :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i$$

où apparaisse $\sum_{i=1}^n a_i, \sum_{i=1}^n b_i, \sum_{i=1}^n c_i$

Faire une généralisation.

Réponses :

1)

$$(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) = a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_2$$

A noter que cette quantité est positive ou nulle. On en déduit :

$$2(a_1 b_1 + a_2 b_2) - (a_1 + a_2)(b_1 + b_2) = a_1 b_1 - a_1 b_2 - a_2 b_1 + a_2 b_2 \geq 0$$

D'où le résultat.

2)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (a_i - a_j)(b_i - b_j) \right) &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i b_i - a_i b_j - a_j b_i + a_j b_j \right) = \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i b_i \right) - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_i b_j \right) - \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j b_i \right) + \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_j b_j \right) \\ &= n \sum_{j=1}^n a_i b_i - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) + n \sum_{j=1}^n a_j b_j \\ &= 2n \left(\sum_{j=1}^n a_i b_i \right) - 2 \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \end{aligned}$$

Or pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$:

$$(a_i - a_j)(b_i - b_j) \geq 0$$

La somme double précédente est donc positive ou nulle. Il en résulte l'inégalité cherchée.

A noter que l'inégalité est stricte si et seulement si il existe un couple $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $a_i < a_j$ et $b_i - b_j$

3) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$.

L'initialisation a déjà été faite. Voyons l'hérédité en supposant la propriété établie au rang k à savoir :

$$\sum_{i=1}^n a_i^k \geq \frac{1}{n^{k-1}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^k$$

Alors :

$$\sum_{i=1}^n a_i^{k+1} = \sum_{i=1}^n a_i^k a_i$$

Et on a :

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

$$0 \leq a_1^k \leq a_2^k \leq \dots \leq a_n^k$$

On a donc :

$$\sum_{i=1}^n a_i^{k+1} \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n a_i^k \right) \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \geq \frac{1}{n} \frac{1}{n^{k-1}} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^k \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) = \frac{1}{n^k} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right)^{k+1}$$

Ce qui prouve l'hérédité.

Appliquons ce résultat à la suite $a_i = i$:

$$\sum_{i=1}^n i^k \geq \frac{1}{n^{k-1}} \left(\sum_{i=1}^n i \right)^k = \frac{1}{n^{k-1}} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^k = \frac{n(n+1)^k}{2^k}$$

Donc :

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^k} \geq \frac{n(n+1)^k}{2^k n^k}$$

Et :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)^k}{2^k n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2^k} = +\infty$$

Donc par comparaison :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^k} = +\infty$$

Une autre façon consiste à faire apparaître une somme de Riemann sur $[0,1]$ associée à la fonction :

$$f(x) = x^k$$

On a en effet :

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{i}{n} \right)^k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i}{n} \right) \sim \int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{k+1}$$

Donc :

$$\frac{\sum_{i=1}^n i^k}{n^k} \sim \frac{n}{k+1}$$

On retrouve bien la même limite. L'avantage avec cette méthode est d'obtenir un équivalent, ce que la première méthode ne permet pas de faire par comparaison unilatérale.

4) on a :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i = \sum_{i=1}^n (a_i b_i) c_i$$

Et :

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$$

$$0 \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$$

Donc :

$$a_1 b_1 \leq a_2 b_2 \leq \dots \leq a_n b_n$$

D'où :

$$\sum_{i=1}^n (a_i b_i) c_i \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n (a_i b_i) \right) \sum_{i=1}^n c_i \geq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i \sum_{i=1}^n b_i \right) \sum_{i=1}^n c_i$$

Ainsi :

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i c_i \geq \frac{1}{n^2} \left(\sum_{i=1}^n a_i \right) \left(\sum_{i=1}^n b_i \right) \left(\sum_{i=1}^n c_i \right)$$

Généralisation : Soit $\in \mathbb{N}^*$, $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$: $0 \leq a_{1j} \leq a_{2j} \leq \dots \leq a_{nj}$

Alors :

$$\sum_{i=1}^n a_{i1} a_{i2} \dots a_{ik} \geq \frac{1}{n^{k-1}} \left(\sum_{i=1}^n a_{i1} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{i2} \right) \left(\sum_{i=1}^n a_{ik} \right)$$

Ce qui se démontre comme précédemment par récurrence sur k .