

Exercice 5

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. X et Y sont deux variables aléatoires définies sur cet espace probabilisé, indépendantes, de même loi, suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, notée $\mathcal{G}(p)$.

On rappelle que, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}$. On pourra poser $q = 1-p$ pour simplifier les notations.

On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$. Par exemple si $X = 5$ et $Y = 2$, alors $U = 2$ et $V = 5$.

- 1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(X \leq n)$. En déduire $\mathbb{P}(X > n)$.
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $\mathbb{P}(U > n)$ et $\mathbb{P}(U \geq n)$.
- 3) Déterminer la loi de U . Montrer que U admet une espérance et la calculer.
- 4) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\mathbb{P}(V \leq n)$. En déduire la loi de V .
- 5) Donner l'expression de $U + V$ en fonction de X et Y . En déduire que V admet une espérance et donner sa valeur.

Corrigé :

1) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p(X \leq n) = \sum_{k=1}^n p(1-p)^{k-1} = p \frac{1 - (1-p)^n}{1 - (1-p)} = 1 - (1-p)^n$$

$$p(X > n) = 1 - p(X \leq n) = (1-p)^n$$

2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$p(U > n) = p(X > n \cap Y > n) = p(X > n) p(Y > n) = (1-p)^n (1-p)^n = (1-p)^{2n}$$

A noter que cela reste valable pour $n = 0$

3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} p(U = n) &= p(U > n-1) - p(U > n) \\ &= (1-p)^{2(n-1)} - (1-p)^{2n} = (1 - (1-p)^2) (1-p)^{2n-2} \end{aligned}$$

$p(U = n) = p(2-p)(1-p)^{2n-2}$

$$E(U) = \sum_{n \geq 1} n p(U = n) = p(2-p) \sum_{n \geq 1} n ((1-p)^2)^{n-1}$$

Or pour $x \in]-1, 1[$:

$$\sum_{n \geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Et en dérivant :

$$\sum_{n \geq 1} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

Donc :

$$E(U) = p(2-p) \frac{1}{(1-(1-p)^2)^2} = \frac{1}{p(2-p)}$$

4)

$$p(V \leq n) = p(X \leq n \cap Y \leq n) = p(X \leq n) p(Y \leq n) = (1 - (1-p)^n)^2$$

Formule valable pour $n = 0$

$$\begin{aligned} p(V = n) &= p(V \leq n) - p(V \leq n-1) = (1 - (1-p)^n)^2 - (1 - (1-p)^{n-1})^2 \\ &= ((1-p)^{n-1} - (1-p)^n) (2 - (1-p)^{n-1} - (1-p)^n) \end{aligned}$$

5) On a :

$$U + V = X + Y$$

Donc en prenant l'espérance :

$$E(U) + E(V) = E(X) + E(Y)$$

Donc :

$$E(V) = 2E(X) - E(U)$$

Or :

$$E(X) = \sum_{n \geq 1} n p (1-p)^{n-1} = p \frac{1}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

Donc :

$$E(V) = \frac{2}{p} - \frac{1}{p(2-p)} = \frac{2(2-p) - 1}{p(2-p)} = \frac{3-2p}{p(2-p)}$$