

Exercice 4

L'espace $\mathbb{R}^3$ est muni du produit scalaire usuel et de la base orthonormée canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.

Si u et v sont deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, leur produit scalaire est noté $\langle u, v \rangle$. On note f

l'endomorphisme dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice transposée de A sera notée tA .

On rappelle qu'un sous-espace vectoriel F est dit stable par f lorsque $f(F) \subset F$ c'est-à-dire lorsque l'image de tout vecteur x de F par f appartient à F .

- 1) Déterminer le rang de f .
- 2) Déterminer les valeurs propres de f et les sous-espaces propres associés. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
- 3) Soit $\mathcal{D}$ une droite vectorielle stable par f et v un vecteur non nul de cette droite. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $f(v) = \lambda v$. En déduire les sous-espaces vectoriels de dimension 1 stables par f .
- 4.a) Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par f si et seulement si $f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$.
- 4.b) Soit $\mathcal{P}$ un plan de $\mathbb{R}^3$ d'équation $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, où $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. On note u le vecteur de coordonnées α, β, γ dans la base $\mathcal{B}$. Montrer que, si $\mathcal{P}'$ est le plan d'équation $ax + by + cz = 0$, $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$ si et seulement si, il existe un réel non nul λ tel que $(a, b, c) = \lambda(\alpha, \beta, \gamma)$. (Ind. On pourra remarquer qu'un vecteur $w = xe_1 + ye_2 + ze_3$ appartient à $\mathcal{P}$ si et seulement si $\langle u, w \rangle = 0$).

- 4.c) On associe à u la matrice $U = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et à w la matrice $W = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Montrer que la propriété

$[\mathcal{P} \text{ est stable par } f]$ est équivalente à la propriété $[\forall X \in M_{3,1}(\mathbb{R}), {}^tUX = 0 \text{ si et seulement si } {}^tUAX = 0]$.

- 4.d) Montrer que $\mathcal{P}$ est stable par f si et seulement si U est un vecteur propre de tA .
- 4.e) En déduire tous les sous-espaces vectoriels de dimension 2 stables par f .

Corrigé :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

1) en échangeant les deux premières colonnes, on obtient une matrice triangulaire supérieure avec des coefficients diagonaux non nuls donc A est de rang 3

2)

$$\begin{aligned}\pi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_3) &= \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 & -3 \\ -1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \begin{vmatrix} -2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda) \begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ -1-\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-1-\lambda) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-1-\lambda)^2\end{aligned}$$

A a donc deux valeurs propres distinctes -1 et 3 .

$$\begin{aligned}X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_{-1} &\Leftrightarrow (A + I_3) X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x + y - 3z = 0 \\ -x + y = 0 \\ 4z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_{-1} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$\begin{aligned}X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_3 &\Leftrightarrow (A - 3I_3) X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x + y - 3z = 0 \\ -x - 3y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3y \\ 3z = 16y \end{cases}\end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_3 = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ 16 \end{pmatrix} \right]$$

Ainsi :

$$\dim(\mathbb{E}_{-1}) + \dim(\mathbb{E}_3) = 2 < 3$$

Donc f n'est pas diagonalisable.

3) Soit $v \in \mathcal{D} \setminus \{\vec{0}\}$ alors v est une base de $\mathcal{D}$ donc il existe un réel λ tel que : $f(v) = \lambda v$.

Donc λ est une valeur propre de f donc λ vaut -1 ou 3 et $\mathcal{D}$ est soit $\mathbb{E}_{-1}$ soit $\mathbb{E}_3$. Les sous espaces propres de f sont donc les seuls sous espaces de dimension 1 stables par f .

4)a)

Soit $\mathcal{P}$ un plan stable par f . Alors :

$$f(\mathcal{P}) \subset \mathcal{P}$$

Soit (u, v) une base de $\mathcal{P}$. Alors :

$$f(\mathcal{P}) = \text{Vect}[f(u), f(v)]$$

Or :

$$x f(u) + y f(v) = 0 \Leftrightarrow f(x u + y v) = 0$$

$$\Leftrightarrow x u + y v \in \ker(f)$$

$$\Leftrightarrow x u + y v = 0$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

Donc la famille $(f(u), f(v))$ est libre. Ainsi :

$$\dim(f(\mathcal{P})) = 2 = \dim(\mathcal{P})$$

D'où :

$$f(\mathcal{P}) = \mathcal{P}$$

La réciproque est triviale.

4)b)

Soit (w_1, w_2) une base orthogonale de $\mathcal{P}$. Posons :

$$v = a e_1 + b e_2 + c e_3 \neq 0$$

On suppose $\mathcal{P} = \mathcal{P}'$ alors (w_1, w_2) est une base orthogonale de $\mathcal{P}'$ donc :

$$\langle v, w_1 \rangle = \langle v, w_2 \rangle = 0$$

Donc v appartient à l'orthogonal de $\mathcal{P}$ qui est une droite dont une base est le vecteur u .

Donc il existe un réel λ non nul tel que :

$$v = \lambda u$$

La réciproque est triviale.

4) c) Notons que :

$${}^tU W = 0 \Leftrightarrow w \in \mathcal{P}$$

$${}^tU A W = 0 \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{P}$$

Supposons $\mathcal{P}$ stable par f alors :

$$\forall w \in \mathbb{R}^3 : w \in \mathcal{P} \Rightarrow f(w) \in \mathcal{P}$$

$$\begin{aligned} \forall w \in \mathbb{R}^3 : f(w) \in \mathcal{P} &\Rightarrow f(w) \in f(\mathcal{P}) \Rightarrow \exists w' \in \mathcal{P} : f(w) = f(w') \Rightarrow \exists w' \in \mathcal{P} : w = w' \\ &\Rightarrow w \in \mathcal{P} \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons :

$$\forall w \in \mathbb{R}^3 : w \in \mathcal{P} \Leftrightarrow f(w) \in \mathcal{P}$$

Alors $\mathcal{P}$ stable par f d'où :

$$\begin{aligned} \mathcal{P} \text{ stable par } f &\Leftrightarrow \left[\forall w \in \mathbb{R}^3 : w \in \mathcal{P} \Rightarrow f(w) \in \mathcal{P} \right] \\ &\Leftrightarrow \forall W \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) : {}^t U W = 0 \Leftrightarrow {}^t U A W = 0 \end{aligned}$$

4 d)

Soit $\mathcal{P}$ stable par f alors :

$$\begin{aligned} w \in \mathcal{P} &\Leftrightarrow {}^t U W = 0 \Leftrightarrow {}^t U A W = 0 \Leftrightarrow {}^t ({}^t A U) W = 0 \\ &\Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R} : {}^t A U = \lambda U \end{aligned}$$

4 e) sous espaces propres de ${}^t A$

$${}^t A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

${}^t A$ et A ayant les mêmes valeurs propres, nous allons rechercher les sous espaces propres associés :

$$\begin{aligned} X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_{-1} &\Leftrightarrow ({}^t A + I_3) X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -x - y = 0 \\ x + y = 0 \\ -3x + 4z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ 4z = 3x \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{-1} &= Vect \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} \right] \\ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{E}_3 &\Leftrightarrow ({}^t A - 3 I_3) X = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -5x - y = 0 \\ x - 3y = 0 \\ -3x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Donc :

$$\mathbb{E}_3 = Vect \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Les plans stables par f sont donc les deux plans d'équation :

$$4x - 4y + 3z = 0$$

et

$$z = 0$$