Exercice 2

On rappelle que $\forall x \in]-1,1[$, $\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$.

1.a) Donner le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1-x)$ sur $]-1,1[$.

1.b) En déduire le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - \ln(1-x)$ sur $]-1,1[$.

2.a) On considère la série entière $\sum_{n \geq 1} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$. Déterminer son rayon de convergence.

On notera S la valeur de sa somme lorsqu'elle converge.

2.b) Déterminer trois réels a, b, c tels que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n(n+1)(2n+1)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{2n+1}$.

2.c) En déduire l'expression de $S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$ sur $]-1,1[$.

3.a) On pose, pour n entier strictement positif et pour x réel, $u_n(x) = \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$. Montrer que la série de fonctions de terme général u_n converge normalement sur l'intervalle $[-1,1]$.

3.b) En déduire que S est continue sur $[-1,1]$.. Donner la valeur commune de $S(1)$ et $S(-1)$.

Corrigé :

1) a) on remplace x par $-x$ dans le développement de $Ln(1+x)$

$$Ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{(-x)^n}{n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

1) b)

$$Ln(1+x) - Ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n - (-x)^n}{n} = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{2p+1-1} \frac{x^{2p+1} - (-x)^{2p+1}}{2p+1}$$

$$= 2 \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

<u>Remarque</u> :

On retrouve un résultat connu pour le développement en série entière de la réciproque de la fonction tangente hyperbolique sur $]-1,1[$:

$$th^{-1}(x) = \frac{1}{2} Ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{x^{2p+1}}{2p+1}$$

2) a) Introduisons la somme partielle :

$$S_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \frac{x^{2\,p+2}}{p\,(p+1)(2\,p+1)}$$

Pour $x \in [-1,1]$:

$$\left|\frac{x^{2\,p+2}}{p\,(p+1)(2\,p+1)}\right| \leq \frac{1}{p\,(p+1)(2\,p+1)}$$

Or :

$$\frac{1}{p\,(p+1)(2\,p+1)} \sim \frac{1}{3\,p^3}$$

Et la série de terme général $\frac{1}{3\,p^3}$ converge. On en déduit que la série définie par $S_n(x)$ est normalement convergente sur $[-1,1]$ donc en particulier, absolument convergente.

Pour $x \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$ posons :

$$U_p = \frac{x^{2\,p+2}}{p\,(p+1)(2\,p+1)}$$

Alors :

$$\left|\frac{U_{p+1}}{U_p}\right| = \frac{|x|^{2\,p+3}}{(p+1)\,(p+2)(2\,p+3)}\ \frac{p\,(p+1)(2\,p+1)}{|x|^{2\,p+1}} \sim |x|^2 > 1$$

D'après la règle de D'alembert, le terme général de la suite U_p tend en valeur absolu vers $+\infty$ donc la série associée diverge trivialement.

Le rayon de convergence est donc égal à 1 et S_n converge normalement sur $[-1,1]$

2) b) On décompose en éléments simples la fraction rationnelle :

$$\frac{1}{x\,(x+1)(2\,x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{2\,x+1}$$

On multiplie par x et on fait tendre x vers 0 :

$$a = 1$$

On multiplie par $x+1$ et on fait tendre x vers -1 :

$$b = 1$$

On multiplie par x et on fait tendre x vers $+\infty$:

$$0 = a + b + \frac{c}{2}$$

Donc :

$$c = -4$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\boxed{\frac{1}{n\,(n+1)(2\,n+1)} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4}{2\,n+1}}$$

2) c) pour $x \in \left]-1,1\right[$:

$$S(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2\,n+2}}{n} + \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2\,n+2}}{n+1} - 4 \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2\,n+2}}{2\,n+1}$$

$$= x^2 \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2\,n}}{n} + \sum_{n\geq 2} \frac{x^{2\,n}}{n} - 4\,x \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1}$$

$$= x^2 \sum_{n\geq 1} \frac{(x^2)^n}{n} + \left(\sum_{n\geq 1} \frac{(x^2)^n}{n} - x^2 \right) - 2\,x \left(2 \sum_{n\geq 0} \frac{x^{2\,n+1}}{2\,n+1} - 2\,x \right)$$

$$= -x^2\,Ln(1-x^2) + (-\,Ln(1-x^2) - x^2) - 2\,x\,(Ln(1+x) - Ln(1-x) - 2\,x)$$

$$= (-1-x^2)\,\big(Ln(1-x) + Ln(1+x)\big) - 2\,x\,Ln(1+x) + 2\,x\,Ln(1-x) + 3\,x^2$$

$$= -(1+2\,x+x^2)\,Ln(1+x) - (1-2\,x+x^2)\,Ln(1-x) + 3\,x^2$$

$$\boxed{S(x) = -(1+x)^2\,Ln(1+x) - (1-x)^2\,Ln(1-x) + 3\,x^2}$$

3) a) Déjà vu en 2) a)

3) b) S_n convergeant normalement sur $[-1,1]$ elle converge uniformément sur ce même intervalle. Or le terme général u_n de S_n est une fonction continue sur $[-1,1]$ donc la limite uniforme de S_n est continue sur $[-1,1]$.

On en déduit :

$$S(-1) = S(1) = \lim_{x\to 1^-} S(x)$$

$$= \lim_{h\to 0^+} -\big(1+(1-h)\big)^2\,Ln\big(1+(1-h)\big) - \big(1-(1-h)\big)^2\,Ln\big(1-(1-h)\big) + 3\,(1-h)^2$$

$$= \lim_{h\to 0^+} -(2-h)^2\,Ln(2-h) - h^2\,Ln(h) + 3\,(1-h)^2$$

$$\boxed{S(-1) = S(1) = 3 - 4\,Ln(2)}$$