Exercice 1

On considère un réel $a \in]0,1[$ et l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M_a = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}.$$

On appelle f_a l'endomorphisme associé à M_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

On note I_3 la matrice identité de $M_3(\mathbb{R})$ et E le sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$ engendré par I_3, M_a, M_a^2.

On rappelle que, si M est une matrice de $M_3(\mathbb{R})$, par convention $M^0 = I_3$.

1.a) Calculer M_a^2.

1.b) Montrer que la famille (I_3, M_a, M_a^2) est libre.

2.a) Déterminer le polynôme caractéristique de M_a.

2.b) Montrer que $(M_a - I_3)(M_a - aI_3)^2 = 0$.

2.c) En déduire que M_a^3 appartient à E.

3.a) Montrer que, pour tout entier positif ou nul n, il existe un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tels que $M_a^n = u_n M_a^2 + v_n M_a + w_n I_3$.

3.b) Déterminer u_0, v_0, w_0 et donner les relations liant $u_{n+1}, v_{n+1}, w_{n+1}$ à u_n, v_n, w_n.

3.c) Montrer que pour tout entier n positif ou nul, $u_{n+3} = (2a+1)u_{n+2} - a(a+2)u_{n+1} + a^2 u_n$.

On admettra pour la suite que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{(n-1)a^n - na^{n-1} + 1}{(a-1)^2}$.

4.a) Montrer que la suite $(M_a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite L_a en fonction de I_3, M_a, M_a^2.

Vérifier que $L_a = \dfrac{1}{(1-a)^2}(M_a - aI_3)^2$. Simplifier l'expression de L_a.

4.b) Vérifier que $L_a^2 = L_a$.

On appelle φ_a l'endomorphisme associé à L_a dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

4.c) Montrer que $\ker(f_a - Id) = \ker(\varphi_a - Id)$ et que $\operatorname{Im}(f_a - Id) = \ker(\varphi_a)$.

<u>Exercice</u> 1 :

a)

$$M_a{}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a & a & 0 \\ 0 & 1-a & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1-a^2 & a^2 & 0 \\ (1-a)^2 & 2\,a\,(1-a) & a^2 \end{pmatrix}$$

b) En ne considérant que les termes diagonaux :

$$x\, I_3 + y\, M_a + z\, {M_a}^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y + z \\ x + a\, y + a^2\, z = 0 \\ a\, x + a\, y + \ a^2\, z = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \quad (1) \\ x + a\, y + a^2\, z = 0 \quad (2) \\ x + y + \ a\, z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a-1)\, z = 0 \quad (3) - (1) \\ x + a\, y + a^2\, z = 0 \quad (2) \\ x + y + \ a\, z = 0 \quad (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + a\, y = 0 \quad (2') \\ x + y = 0 \quad (3') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + a\, y = 0 \quad (2') \\ (1-a)\, y = 0 \quad (3') - (2') \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ x = y = z = 0$$

Donc $\left(I_3, M_a, {M_a}^2\right)$ est une famille libre.

2 a) Le polynôme caractéristique de M_a est :

$$\pi_{M_a}(X) = \begin{vmatrix} 1-X & 0 & 0 \\ 1-a & a-X & 0 \\ 0 & 1-a & a-X \end{vmatrix} = (1-X)\,(a-X)^2$$

2 b) D'après le théorème de Cayley Hamilton, $\pi_{M_a}(X)$ est un polynôme annulateur de M_a donc :

$$(I_3 - M_a)\,(a\, I_3 - M_a)^2 = 0$$

Soit en développant :

$$(I_3 - M_a)\left(a^2\, I_3 - 2\, a\, M_a + {M_a}^2\right) = 0$$

$$a^2\, I_3 - (a^2 + 2\, a)\, M_a + (2\, a + 1)\, {M_a}^2 - {M_a}^3 = 0$$

$$\boxed{{M_a}^3 = (2\, a + 1)\, {M_a}^2 - (a^2 + 2\, a)\, M_a + a^2\, I_3}$$

2 c) Comme E est un sous espace vectoriel toute combinaison linéaire d'éléments de E est dans E. Ainsi :

$${M_a}^3 \in E$$

3 a) Introduisons la proposition logique P_n pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall\, k \in [\![0, n]\!] : {M_a}^k \in Vect\left[I_3, M_a, {M_a}^2\right] = E$$

La proposition est vraie pour $n = 0,1,2,3$. Supposons là vraie pour un entier $n \geq 3$ alors :

$${M_a}^{n+1} = {M_a}^{n-2} {M_a}^3 = {M_a}^{n-2}\left(a^2\, I_3 - (a^2 + 2\, a)\, M_a + (2\, a + 1)\, {M_a}^2\right)$$

$$= \ a^2\, {M_a}^{n-2} - (a^2 + 2\, a)\, {M_a}^{n-1} + (2\, a + 1)\, {M_a}^n$$

Or, par hypothèse de récurrence, ${M_a}^{n-2}, {M_a}^{n-1}$ et ${M_a}^n$ sont dans E. Donc :

$$M_a{}^{n+1} \in E$$

La proposition P_n est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\left(I_3, M_a, M_a{}^2\right)$ étant une base de E, on en déduit pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'existence d'un unique triplet de réels (u_n, v_n, w_n) tel que :

$$M_a{}^n = u_n\, M_a{}^2 + v_n\, M_a + w_n\, I_3$$

3 b)

$$(u_0, v_0, w_0) = (0,0,1)$$

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$M_a{}^{n+1} = M_a\, M_a{}^n = u_n\, M_a{}^3 + v_n\, M_a{}^2 + w_n\, M_a$$

$$= u_n\, \left((2\,a+1)\, M_a{}^2 - (a^2+2\,a)\, M_a + a^2\, I_3\right) + v_n\, M_a{}^2 + w_n\, M_a$$

$$= \left((2\,a+1)\, u_n + v_n\right) M_a{}^2 + \ (-(a^2+2\,a)\, u_n + w_n)\, M_a + a^2\, u_n\, I_3$$

Donc :

$$\boxed{\begin{cases} u_{n+1} = (2\,a+1)\, u_n + v_n \\ v_{n+1} = -(a^2+2\,a)\, u_n + w_n \\ w_{n+1} = a^2\, u_n \end{cases}}$$

3 c)

On a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_{n+2} = -(a^2+2\,a)\, u_{n+1} + w_{n+1} = -(a^2+2\,a)\, u_{n+1} + a^2\, u_n$$

et

$$u_{n+3} = (2\,a+1)\, u_{n+2} + v_{n+2}$$

$$\boxed{u_{n+3} = (2\,a+1)\, u_{n+2} - (a^2+2\,a)\, u_{n+1} + a^2\, u_n}$$

Non demandé : démonstration de la formule admise :

L'équation caractéristique associée à la relation de récurrence précédente est :

$$r^3 - (2\,a+1)\, r^2 + (a^2+2\,a)\, r - a^2 = 0$$

Or $r = a$ est une racine évidente donc l'équation devient :

$$(r-a)\, (r^2 + b\, r + a)) = 0$$

Où on trouve par identification :

$$b = \ -(a+1)$$

Donc l'équation est équivalente à :

$$(r-a)\, (r^2 - (a+1+a)) = 0$$

Or $r = a$ est encore une racine évidente du facteur du second degré, donc :

$$(r-a)^2\, (r-1) = 0$$

L'équation a donc une racine simple 1 et une racine double a. La solution générale de la relation de récurrence est donc de la forme :

$$\boxed{u_n = (A\,n + B)\,a^n + C}$$

Où A, B, C sont des constantes réelles, déterminées par les conditions initiales. En effet :

$$u_0 = B + C = 0$$

Donc :

$$\boxed{B = -C}$$

$$u_1 = (2\,a + 1)\,u_0 + v_0 = 0$$

Donc :

$$(A + B)\,a + C = 0$$

$$A\,a - C\,a + C = 0$$

$$\boxed{A = C\,\frac{a-1}{a}}$$

$$u_2 = (2\,a + 1)\,u_1 + v_1 = v_1 = -(a^2 + 2\,a)\,u_0 + w_0 = w_0 = 1$$

Donc :

$$(2\,A + B)\,a^2 + C = 1$$

$$\left(2\,C\,\frac{a-1}{a} - C\right)a^2 + C = 1$$

$$2\,C\,(a-1)\,a - a^2\,C + C = 1$$

$$a^2\,C - 2\,a\,C + C = 1$$

$$\boxed{C = \frac{1}{(1-a)^2}}$$

D'où :

$$u_n = \frac{1}{(1-a)^2}\left(\left(\frac{a-1}{a}\,n - 1\right)a^n + 1\right)$$

$$u_n = \frac{n\,a^n - n\,a^{n-1} - \,a^n + 1}{(1-a)^2}$$

Finalement :

$$\boxed{u_n = \frac{(n-1)\,a^n - n\,a^{n-1} + 1}{(1-a)^2}}$$

4 a) on a :

$$\lim_{n\to+\infty}(n-1)\,a^n = \lim_{n\to+\infty} n\,a^{n-1} = 0$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{(1-a)^2}}$$

$$v_n = u_{n+1} - (2\,a+1)\,u_n$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \frac{1}{(1-a)^2} - (2\,a+1)\,\frac{1}{(1-a)^2} = \frac{-2\,a}{(1-a)^2}}$$

$$w_n = a^2\,u_{n-1}$$

Donc :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} w_n = \frac{a^2}{(1-a)^2}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} {M_a}^n = \frac{1}{(1-a)^2}\,\left({M_a}^2 - 2\,a\,M_a + a^2\,I_3\right) = \frac{1}{(1-a)^2}\,(M_a - I_3)^2}$$

Or :

$$M_a - I_3 = (1-a)\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Donc :

$$\boxed{L_a = \frac{1}{(1-a)^2}\,(M_a - I_3)^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}}$$

4 b) On vérifie aisément : ${L_a}^2 = L_a$

4 c)

$$X \in ker(f_a - Id\,) \Rightarrow\; M_a\,X = X$$

$$\Rightarrow\;\; \forall\, n \in \mathbb{N} :\; {M_a}^n\,X = X\;(récurrence\ évidente)$$

$$\Rightarrow\;\; L_a\,X = X\;\;(passage\ à\ la\ limite)$$

$$\Rightarrow\; X \in ker(\varphi_a - Id\,)$$

Donc :

$$\boxed{ker(f_a - Id\,) \subset ker(\varphi_a - Id\,)}$$

Or :

$$L_a - I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Les deux premières colonnes sont libres et la somme des trois colonnes est nulle donc $L_a - I_3$ est de rang 2 et d'après le théorème du rang :

$$dim\big(ker(\varphi_a - Id\ )\big) = dim(\mathbb{R}^3) - dim\big(Im(\varphi_a - Id\ )\big) = 3 - 2 = 1$$

De même :

$$M_a - I_3 = (1-a)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = (1-a)\,(L_a - I_3)$$

Cette matrice est de même rang que $L_a - I_3$ et donc :

$$dim\big(ker(f_a - Id\ )\big) = dim(\mathbb{R}^3) - dim\big(Im(f_a - Id\ )\big) = 3 - 2 = 1$$

Ainsi :

$$\boxed{dim\big(ker(f_a - Id\ )\big) = dim\big(ker(\varphi_a - Id\ )\big)}$$

D'où :

$$\boxed{ker(f_a - Id\ ) = ker(\varphi_a - Id\ )}$$

$$Y \in Im(f_a - Id\ ) \Rightarrow\ \exists\, X \in \mathbb{R}^3 :\ Y =\ M_a\,X - X$$

$$\Rightarrow\ \ \forall\, n \in \mathbb{N} :\ {M_a}^n\,Y = {M_a}^{n+1}\,X - {M_a}^n\,X$$

$$\Rightarrow\ \ L_a\,Y = L_a\,X - L_a\,X = 0\ (par\ passqge\ \text{à}\ la\ limite)$$

$$\Rightarrow Y \in ker(\varphi_a)$$

Donc :

$$\boxed{Im(f_a - Id\ ) \subset ker(\varphi_a)}$$

Or L_a est de rang 1 donc :

$$dim\big(ker(\varphi_a)\big) = 2$$

Et donc :

$$\boxed{dim\big(Im(f_a - Id\ )\big) = dim\big(ker(\varphi_a)\big)}$$

D'où :

$$\boxed{Im(f_a - Id\ ) = ker(\varphi_a)}$$