Exercice 5

1) On considère les séries entières :

$$\sum_{n\geqslant 0} x^n \quad , \quad \sum_{n\geqslant 1} nx^{n-1} \quad , \quad \sum_{n\geqslant 2} n(n-1)x^{n-2}$$

1.a) Déterminer leur rayon de convergence commun R.
1.b) Calculer leurs sommes sur l'intervalle $]-R,R[$, c'est-à-dire les sommes suivantes :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n \quad , \quad \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \quad , \quad \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

Dans les questions qui suivent, on considère un jeu de pile ou face.
La probabilité d'obtenir pile est $p \in]0,1[$.
On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le premier pile, et Y le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le deuxième pile.
Par exemple, si les premiers lancers donnent $FFPFP...$, $X=3$ et $Y=5$, et si les premiers lancers donnent $PFP...$, $X=1$ et $Y=3$.

2.a) Quelles sont les valeurs possibles pour X ?
Donner la loi de X.
2.b) La variable aléatoire X admet-elle une espérance ?
Si oui, la calculer.

3.a) Quelles sont les valeurs possibles pour Y ? Donner la loi de Y.
Indication : on pourra commencer par chercher $P(Y=n)$ pour $n \in \{2,3,4\}$, avant de passer au cas général.
3.b) La variable aléatoire Y admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

4) Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Corrigé :

1a) La règle de D'alembert appliqué à ces séries montre qu'elles sont de rayon de convergence 1

1b) sur $]-1,1[$:

$$\sum_{n\geq 0} x^n = \frac{1}{1-x}$$

Par dérivation :

$$\sum_{n\geq 1} n\, x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$\sum_{n\geq 2} n\,(n-1)\,x^{n-1} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

2a) $X(\Omega) = [\![1, +\infty[$

Loi de X :

Définissons les évènements indépendants dans leur ensemble, pour $n \in [\![1, +\infty[$:

$$P_n = \text{"}un\ pile\ est\ obtenu\ au\ lancer\ de\ rang\ n\text{"}$$

Alors, pour $n \in [\![1, +\infty[$:

$$P(X = n) = P(\overline{P_1} \cap \dots \cap \overline{P_{n-1}} \cap P_n) = (1-p)^{n-1}\,p$$

2b) Espérance de X :

$$E(X) = \sum_{n\geq 1} n\,P(X = n) = \sum_{n\geq 1} n\,(1-p)^{n-1}\,p = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$$

3a) $Y(\Omega) = [\![2, +\infty[$

Loi de Y :

Définissons les évènements, pour $i \in [\![2, +\infty[\,, n \in [\![2, +\infty[\,, i < n$

$$Q_{i,n} = \text{"}un\ pile\ est\ obtenu\ au\ lancer\ de\ rang\ i\ et\ des\ faces\ sont\ obtenues$$

$$\text{à}\ tous\ les\ autres\ lancers\ jusqu'au\ rang\ n-1\text{"}$$

Alors :

$$P\big(Q_{i,n}\big) = (1-p)^{n-2}\,p$$

Pour $n \in [\![2, +\infty[$:

$$P(Y = n) = \sum_{i=1}^{n-1} P\big(Q_{i,n} \cap P_n\big) = \sum_{i=1}^{n-1} P\big(Q_{i,n}\big)\,P(P_n)$$

$$= (n-1)\,(1-p)^{n-2}\,p^2$$

3b) Espérance de Y :

$$E(Y) = \sum_{n\geq 2} n\,P(Y = n) = \sum_{n\geq 2} n\,(n-1)\,(1-p)^{n-2}\,p^2 = \frac{2\,p^2}{(1-(1-p))^3} = \frac{2}{p}$$

4) soit $n < m$

$$P(X = n\ \cap Y = m) = P\big(Q_{n,m} \cap P_m\big) = P\big(Q_{n,m}\big)\,P(P_n) = (1-p)^{m-2}\,p^2$$

$$P(X = n) \times P(Y = m) = (1-p)^{n-1}\,p\,(m-1)(1-p)^{m-2}\,p^2 = (m-1)(1-p)^{m+n-3}\,p^3$$

Les deux quantités précédentes n'étant pas égales pour tout $n < m$, les deux variables ne sont pas indépendantes.