Exercice 1

On désigne par $M_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées réelles d'ordre 3, et on note I_3 la matrice unité de $M_3(\mathbb{R})$.
Soit a un réel. On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & a-1 & -1 \\ 1-a & a & a-1 \\ 1 & a-1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Etude du cas $a = 1$
Dans toute cette question, on suppose que $a = 1$.
1.a) Expliciter M, puis $M - I_3$.
Calculer $(M - I_3)^2$.
1.b) Déterminer l'unique valeur propre de M.
1.c) M est-elle diagonalisable ?
M est-elle inversible ?

2) Etude du cas $a = 0$.
Dans toute cette question, on suppose que $a = 0$.
2.a) Expliciter M. Déterminer ses valeurs propres.
2.b) Pour chaque valeur propre de M, déterminer une base du sous-espace propre associé.
La matrice M est-elle diagonalisable ?

3) Etude du cas où a est différent de 0 et de 1.
3.a) Déterminer le polynôme caractéristique de M.
En déduire ses valeurs propres.
3.b) Pour chacune des valeurs propres trouvées, déterminer une base du sous-espace propre associé.
3.c) On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est M.
Déterminer une base (u, v, w) dans laquelle la matrice de f est la matrice T définie par :

$$T = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Corrigé :

1a) $a = 1$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, M - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, (M - I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1b) La matrice étant d'ordre impair, elle admet au moins une valeur propre réelle.

Soit alors λ une valeur propre réelle de M et V un vecteur propre non nul associé, alors :

$$M\,V = \lambda\,V$$

$$M^2\,V = M\,\lambda\,V = \lambda\,M\,V = \lambda^2\,V$$

$$(M - I_3)^2\,V = M^2\,V - 2\,M\,V + V = (\lambda^2 - 2\,\lambda + 1)\,V = (\lambda - 1)^2\,V$$

$$(M - I_3)^2 = 0 \;et\; V \neq 0 \;donc\; (\lambda - 1)^2 = 0 \;d'où\; \lambda = 1$$

M a donc pour unique valeur propre 1.

1c) $M \neq I_3$ donc M n'est pas diagonalisable. 0 n'est pas valeur propre de M donc M est inversible.

2a) $a = 0$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(M - \lambda\,I_3) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & -1 \\ 1 & -\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 1-\lambda & 1-\lambda & -1 \\ 1 & \lambda-1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (1-\lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(1-\lambda)^2$$

Les valeurs propres de M sont donc 0 et 1.

2b) sous espaces propres

On pose :

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$M\,V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\,x - y - z = 0 \\ x - z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z \\ x = y \end{cases}$$

$$(M - I_3)\,V = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \\ x - y - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y + z$$

Donc :

$$\mathbb{E}_0 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right), \qquad \mathbb{E}_1 = Vect\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$dim(\mathbb{E}_0) + dim(\mathbb{E}_1) = 3$$

Donc M est diagonalisable

3a) $a \neq 0 \;et\; a \neq 1$

$$\det(M-\lambda\, I_3)=\begin{vmatrix}2-\lambda & a-1 & -1\\ 1-a & a-\lambda & a-1\\ 1 & a-1 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & \lambda-1\\ 1-a & a-\lambda & a-1\\ 1 & a-1 & -\lambda\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 1-a & a-\lambda & 0\\ 1 & a-1 & 1-\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(1-\lambda)^2\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 1-a & a-\lambda & 0\\ 1 & a-1 & 1\end{vmatrix}=(a-\lambda)(1-\lambda)^2$$

Les valeurs propres de M sont donc a et 1.

3b) sous espaces associés

On pose :

$$V=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$(M-I_3)\,V=0\Leftrightarrow\begin{cases}x+(a-1)\,y-z=0\\ (1-a)\,x+(a-1)\,y+(a-1)\,z=0\\ x+(a-1)\,y-z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=z\\ y=0\end{cases}$$

$$(M-a\,I_3)\,V=0\Leftrightarrow\begin{cases}(2-a)\,x+(a-1)\,y-z=0\\ (1-a)\,x+(a-1)\,z=0\\ x+(a-1)\,y-a\,z=0\end{cases}\Leftrightarrow x=y=z$$

Donc :

$$\mathbb{E}_a=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\right),\qquad \mathbb{E}_1=Vect\left(\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}\right)$$

$$dim(\mathbb{E}_a)+dim(\mathbb{E}_1)=2<3$$

Donc M n'est pas diagonalisable

3 c) Posons

$$U=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix},\qquad V=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix},\qquad W=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$$

$$M\,W=V+W\Leftrightarrow\ (M-I_3)\,W=V$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+(a-1)\,y-z=1\\ (1-a)\,x+(a-1)\,y+(a-1)\,z=0\\ x+(a-1)\,y-z=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+(a-1)\,y-z=1\\ x=y+z\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}y=a^{-1}\\ x=a^{-1}+z\end{cases}$$

Si on prend donc $z=0$ et :

$$W=\begin{pmatrix}a^{-1}\\ a^{-1}\\ 0\end{pmatrix}$$

On peut définir la matrice de passage de la base canonique à la base : (U, V, W)

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a^{-1} \\ 1 & 0 & a^{-1} \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On a alors :

$$M\,U = a\,U, \qquad M\,V = 1\,V, \qquad M\,W = 1\,V + 1\,W$$

La matrice de f dans cette base est donc la matrice T. Ainsi :

$$M\,P = P\,T$$

Soit :

$$M = P\,T\,P^{-1}$$