

Exercice 4

Soit $E = C([0,1], \mathbb{R})$. On pose, pour f et g appartenant à E , $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$.

a) Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est un produit scalaire.

b) Soit n un entier strictement positif. Vérifier que la fonction g_n définie sur $[0,1]$ par :

$$\begin{cases} \forall t > 0, g_n(t) = t^n \ln t \\ g_n(0) = 0 \end{cases} \text{ est continue. Calculer } \int_0^1 t^n \ln t dt.$$

c) Soit $F = \{t \mapsto at + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2, t \in [0,1]\}$. Déterminer une base orthonormale de F pour le produit scalaire défini plus haut.

d) Déterminer le projeté orthogonal de g_1 sur F .

e) En déduire $\inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \int_0^1 (at + b - t \ln t)^2 dt$.

Corrigé :

a) La forme est

bilinéaire : $g \rightarrow \langle f, g \rangle$ est linéaire pour tout g , $f \rightarrow \langle f, g \rangle$ est linéaire pour tout f

symétrique : $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$

définie : $\langle f, f \rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

positive : $\langle f, f \rangle \geq 0$

b) g_n est continue (et même de classe C^∞) sur $]0, +\infty[$ par produit. En 0 on a :

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} t^n \ln(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{n} t^n \ln(t^n) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{n} x \ln(x) = 0 = g_n(0)$$

Donc g_n est continue en 0. Elle est donc bien intégrable au sens de Riemann sur $[0,1]$. De plus, en faisant une intégration par partie :

$$t^n = u'(t), \quad \ln(t) = v(t)$$

$$\frac{t^{n+1}}{n+1} = u(t), \quad \frac{1}{t} = v'(t)$$

on a :

$$\int_0^1 t^n \ln(t) dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \ln(t) \right]_{t \rightarrow 0}^1 - \int_0^1 \frac{t^n}{n+1} dt = - \left[\frac{t^{n+1}}{(n+1)^2} \right]_0^1 = - \frac{1}{(n+1)^2}$$

c) F est un sous espace vectoriel de dimension 2 de base $(f_1 : t \rightarrow 1, f_2 : t \rightarrow t)$. Utilisons le procédé d'orthonormalisation de Schmidt afin de créer une base orthonormale à partir de cette base.

$$\langle f_1, f_1 \rangle = \int_0^1 1 \, dt = 1$$

Le premier vecteur de base est alors :

$$h_1 = \frac{1}{\sqrt{\langle f_1, f_1 \rangle}} f_1 = f_1$$

Pour le second, on commence par définir un vecteur orthogonal à h_1 comme suit :

$$h'_2 = f_2 - \langle f_2, h_1 \rangle h_1$$

Or :

$$\langle f_2, h_1 \rangle = \int_0^1 t \, dt = \frac{1}{2}$$

Donc :

$$h'_2 : t \rightarrow t - \frac{1}{2}$$

On norme ensuite ce vecteur en définissant :

$$h_2 = \frac{1}{\sqrt{\langle h'_2, h'_2 \rangle}} h'_2$$

Or :

$$\langle h'_2, h'_2 \rangle = \int_0^1 \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 dt = \left[\frac{\left(t - \frac{1}{2}\right)^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{12}$$

Ainsi :

$$h_2 : t \rightarrow 2\sqrt{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)$$

d) Le projeté orthogonal de g_1 sur F est :

$$P_F(g_1) = \langle g_1, h_1 \rangle h_1 + \langle g_1, h_2 \rangle h_2 = \langle g_1, h_1 \rangle h_1 + \frac{\langle g_1, h'_2 \rangle}{\langle h'_2, h'_2 \rangle} h'_2$$

Or :

$$\langle g_1, h_1 \rangle = \int_0^1 t \ln(t) \, dt = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} \langle g_1, h'_2 \rangle &= \int_0^1 t \ln(t) \left(t - \frac{1}{2}\right) dt = \int_0^1 t^2 \ln(t) dt - \frac{1}{2} \int_0^1 t \ln(t) dt \\ &= -\frac{1}{9} + \frac{1}{8} = \frac{1}{72} \end{aligned}$$

D'où :

$$P_F(g_1)(t) = -\frac{1}{4} + \frac{12}{72} \left(t - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6}t - \frac{1}{3}$$

e) on a :

$$\begin{aligned} \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left(\int_0^1 (a t + b - t \ln(t))^2 dt \right) &= \inf_{f \in F} \|f - g_1\|^2 = \|P_F(g_1) - g_1\|^2 \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{6}t - \frac{1}{3} - t \ln(t) \right)^2 dt \\ &= \frac{1}{36} \int_0^1 t^2 dt + \frac{1}{9} \int_0^1 dt + \int_0^1 t^2 \ln^2(t) dt - \frac{1}{3} \int_0^1 t^2 \ln(t) dt - \frac{1}{9} \int_0^1 t dt + \frac{2}{3} \int_0^1 t \ln(t) dt \\ &= \frac{1}{108} + \frac{1}{9} + \left[\frac{t^3}{3} \ln^2(t) \right]_0^1 - \frac{2}{3} \int_0^1 t^2 \ln(t) dt + \frac{1}{27} - \frac{1}{18} - \frac{1}{6} \\ &= \frac{13}{108} + \frac{2}{27} + \frac{1}{27} - \frac{2}{9} = \frac{1}{108} \end{aligned}$$