Exercice 3

Soit $a \in \mathbb{R}$, b et c deux éléments de $\mathbb{R}^+$ et $A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$.

a) Calculer le polynôme caractéristique de A.

b) La matrice A est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$? (*On distinguera les cas :* $bc > 0$, $bc = 0$.)

c) On suppose $c = 0$. Calculer A^2, A^3 puis A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Toujours dans le cas où $c = 0$, calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{A^k}{k!}$. Les coefficients de S_n admettent-ils une limite lorsque $n \to +\infty$? On notera S la matrice dont chaque coefficient est la limite du coefficient de mêmes indices de S_n. Donner S.

Corrigé :

a) En développant par rapport à la deuxième colonne :

$$P_A(X) = \begin{vmatrix} a - X & 0 & b \\ 0 & a - X & 0 \\ c & 0 & a - X \end{vmatrix} = (a - X)\left((a - X)^2 - b\,c\right)$$
$$= (a - X)\left(a - \sqrt{b\,c} - X\right)\left(a + \sqrt{b\,c} - X\right)$$

b)

1er cas : $b = c = 0, A$ est diagonale donc diagonalisable

2ème cas : $b = 0, c \neq 0$ ou $b \neq 0, c = 0$. La matrice n'a qu'une valeur propre et n'est pas diagonale, donc n'est pas diagonalisable.

3ème cas : $b \neq 0, c \neq 0$. La matrice a trois valeurs propres distinctes et est d'ordre 3 donc elle est diagonalisable.

c)

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 & b \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \qquad A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 2\,a\,b \\ 0 & a^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}, \qquad A^3 = \begin{pmatrix} a^3 & 0 & 3\,a^2\,b \\ 0 & a^3 & 0 \\ 0 & 0 & a^3 \end{pmatrix}$$

Faisons un raisonnement par récurrence en supposant que pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 & n\,a^{n-1}\,b \\ 0 & a^n & 0 \\ 0 & 0 & a^n \end{pmatrix}$$

Alors :

$$A^{n+1} = A^n\,A = \begin{pmatrix} a^{n+1} & 0 & (n+1)\,a^n\,b \\ 0 & a^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & a^{n+1} \end{pmatrix}$$

La propriété déjà initialisée pour $n = 1,2,3$ s'hérite.

d) pour $n > 1$:

$$S_n = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 & \sum_{k=1}^{n} \frac{k\ a^{k-1}\ b}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 & b \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a^k}{k!} \\ 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{k=0}^{n} \frac{a^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$$S = \begin{pmatrix} e^a & 0 & b\ e^a \\ 0 & e^a & 0 \\ 0 & 0 & e^a \end{pmatrix}$$