Exercice 5

On note (E) l'ensemble des fonctions définies et continues sur le segment $[-1, 1]$ et à valeurs réelles.

1) Pour tout couple (f, g) d'éléments de (E) , on pose :

$$(f|g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t) dt$$

Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur (E) .

2) On note f_0 et f_1 les fonctions définies par :

$$\forall t \in [-1, 1], f_0(t) = 1, \text{ et } f_1(t) = t$$

On pose : $F = \text{Vect}(f_0, f_1)$.

2a) Déterminer une base orthonormale (g_0, g_1) de F .

2b) Rappeler l'expression du projeté orthogonal d'un élément f de E sur F , utilisant une base orthonormale de F .

3) Déterminer le projeté orthogonal de $g : t \mapsto \sin(\pi t)$ sur F .

4) En déduire la valeur du réel :

$$m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} \left[\int_{-1}^1 (g(t) - (a + bt))^2 dt \right]$$

On justifiera la méthode utilisée.

Corrigé

1) Montrons que la forme est bilinéaire, symétrique définie positive :

- Bilineaire :

Soit $(f, g, h, \alpha) \in (E)$ alors :

$$(f|g + \alpha h) = \int_{-1}^1 f(t) (g + \alpha h)(t) dt$$

$$\int_{-1}^1 f(t) g(t) dt + \alpha \int_{-1}^1 f(t) h(t) dt = (f|g) + \alpha (f|h)$$

$$(g + \alpha h|f) = (f|g + \alpha h) = (f|g) + \alpha (f|h) = (g|f) + \alpha (h|f)$$

- Symétrique

$$(f|g) = (g|f)$$

- Définie :

$$(f|f) = 0 \Leftrightarrow \int_{-1}^1 (f(t))^2 dt = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1,1] : (f(t))^2 = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [-1,1] : f(t) = 0$$

car f^2 étant positive ou nulle et continue sur $[-1,1]$

- Positive :

$$(f|f) = \int_{-1}^1 (f(t))^2 dt \geq 0$$

2a) Notons que :

$$(f_0|f_1) = \int_{-1}^1 t dt = 0$$

f_0 et f_1 sont donc orthogonales pour ce produit scalaire. Il suffit donc de les normer pour obtenir une base orthonormale.

Or :

$$(f_0|f_0) = \int_{-1}^1 1 dt = 2$$

$$(f_1|f_1) = \int_{-1}^1 t^2 dt = \frac{2}{3}$$

Ainsi :

$$\|f_0\| = \sqrt{(f_0|f_0)} = \sqrt{2}$$

$$\|f_1\| = \sqrt{(f_1|f_1)} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

On définit alors :

$$g_0 = \frac{1}{\|f_0\|} f_0 : t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_1 = \frac{1}{\|f_1\|} f_1 : t \rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}} t$$

2b)

$$P_F(f) = (f|g_0) g_0 + (f|g_1) g_1$$

3)

$$(g|g_0) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 \sin(\pi t) dt = 0 \text{ (fonction impaire à intégrer)}$$

$$(g|g_1) = \sqrt{\frac{3}{2}} \int_{-1}^1 t \sin(\pi t) dt$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\left[-\frac{t}{\pi} \cos(\pi t) \right]_{-1}^1 + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \cos(\pi t) dt \right) \\
&= \sqrt{\frac{3}{2}} \left(\frac{2}{\pi} + 0 \right) = \frac{\sqrt{6}}{\pi}
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$P_F(g) = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{\frac{3}{2}} t = \frac{3}{\pi} t$$

4)

$$m = \inf_{(a,b) \in \mathbb{R}^2} (\|g - (a f_0 + b f_1)\|^2)$$

m est donc le carré de la distance de g à F . Elle est atteinte en un point unique qui est le projeté orthogonal de g sur F et- elle vaut :

$$\begin{aligned}
\|g - P_F(g)\|^2 &= \int_{-1}^1 \left(\sin(\pi t) - \frac{3}{\pi} t \right)^2 dt \\
&= \int_{-1}^1 (\sin(\pi t))^2 dt - \frac{6}{\pi} \int_{-1}^1 t \sin(\pi t) dt + \frac{9}{\pi^2} \int_{-1}^1 t^2 dt \\
&= \int_{-1}^1 \frac{1 - \cos(2\pi t)}{2} dt - \frac{6}{\pi} \frac{2}{\pi} + \frac{9}{\pi^2} \frac{2}{3} \\
&= 1 - \frac{6}{\pi^2}
\end{aligned}$$