Exercice 4

Soit a et b deux constantes réelles.
On considère l'équation différentielle :

$$x^2y" + axy' + by = 0 \qquad (E)$$

1) Préciser la structure de l'ensemble des solutions de (E) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

2) Montrer que si y est solution de (E) sur I, alors, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = y\,(exp(t))$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$z" + (a-1)z' + bz = 0 \qquad (E_c)$$

Indication : on pourra calculer $g'(t)$ et $g"(t)$.

3) Réciproquement, soit $t \mapsto g(t)$ une solution de E_c sur $\mathbb{R}$.
Montrer que la fonction f définie par :

$$\forall x > 0, f(x) = g(\ln(x))$$

est une solution sur $I =]0, +\infty[$ de (E).

4) Donner les solutions à valeurs réelles de l'équation (E_c) dans le cas où $a = 3$ et $b = 1$ et dans le cas où $a = 1$ et $b = 4$.

En déduire, dans chacun de ces cas, les solutions à valeurs réelles de l'équation (E) sur I.

5) Montrer que si y est solution de (E) sur J, alors, la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, g(t) = y(-exp(t))$$

est solution sur $\mathbb{R}$ de (E_c).

6) On suppose dans cette question que $a = 1$ et $b = -4$.

6a) Donner les solutions de (E) sur I et J.

6b) En déduire l'ensemble des solutions de classe C^2 de (E) sur $\mathbb{R}$.

Corrigé :

1) Sur I et J l'ensemble des solutions est un sous espace vectoriel de dimension 2 de l'espace vectoriel formé par l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

2) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\ t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = e^t\ y'(e^t)$$

$$g''(t) = e^t\ y'(e^t) + e^{2t}\ y''(e^t) = g'(t) + e^{2t}\ y''(e^t)$$

Or :

$$e^{2t}\ y''(e^t) + a\ \ e^t\ y'(e^t) + b\ y(e^t) = 0$$

Donc :

$$g''(t) - g'(t) +\ a\ g'(t) +\ b\ g(t) = 0$$

D'où :

$$g''(t) +\ (a-1)\ g'(t) +\ b\ g(t) = 0$$

3) $\forall\ x \in I$:

$$f(x) = g\big(Ln(x)\big)$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}\ g'\big(Ln(x)\big)$$

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2}\ g'\big(Ln(x)\big) + \frac{1}{x^2}\ g''\big(Ln(x)\big) = -\frac{1}{x}\ f'(x) + \frac{1}{x^2}\ g''\big(Ln(x)\big)$$

Or :

$$g''\big(Ln(x)\big) + (a-1)\ g'\big(Ln(x)\big) + b\ \ g\big(Ln(x)\big) = 0$$

Donc :

$$\frac{1}{x^2}\ g''\big(Ln(x)\big) + (a-1)\ \frac{1}{x^2}\ g'\big(Ln(x)\big) + b\ \frac{1}{x^2}\ \ g\big(Ln(x)\big) = 0$$

Soit :

$$f''(x) + \frac{1}{x}\ f'(x) + (a-1)\ \frac{1}{x}\ f'(x) + b\ \frac{1}{x^2}\ f(x) = 0$$

D'où :

$$x^2\ f''(x) + a\ x\ f'(x) + b\ \ f(x) = 0$$

4)<u>1^{er} cas : $a = 3, b = 1$</u>

$$z'' + 2\ z' + z = 0 \qquad (E_c)$$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + 2\ r + 1 = 0$$

de solution unique $r = -1$ donc une base de solution est formée par la famille $(t\ e^{-t}, e^{-t})$. L'ensemble des solutions de (E_c) est alors formé par les fonctions de la forme :

$$g(t) = (c\, t + d\,)e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}, (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

<u>2ème cas : $a = 1, b = 4$</u>

$$z'' + 4\, z = 0 \qquad (E_c)$$

L'équation caractéristique associée est :

$$r^2 + 4 = 0$$

de solution unique $r = -2\, i$ et $r = 2\, i$ donc une base de solution à valeurs dans $\mathbb{C}$ est formée par la famille $\left(e^{-2\, i\, t}, e^{-2\, i\, t}\right)$ qui peut être remplacée par la famille $\left(cos(2\, t), sin(2\, t)\right)$ L'ensemble des solutions de (E_c) est alors formé par les fonctions de la forme :

$$g(t) = c\, cos(2\, t) + d\, sin(2\, t)\, , \qquad t \in \mathbb{R}, (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

5) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall\, t \in \mathbb{R}$:

$$g'(t) = -e^t\, y'(-e^t)$$

$$g''(t) = -e^t\, y'(e^{-t}) + e^{2t}\, y''(-e^t) = g'(t) + e^{2t}\, y''(e^t)$$

Or :

$$e^{2t}\, y''(-e^t) + a(-e^t)\, y'(-e^t) + b\, y(-e^t) = 0$$

Donc :

$$g''(t) - g'(t) + \ a\, g'(t) + \ b\, g(t) = 0$$

D'où :

$$g''(t) + \ (a - 1)\, g'(t) + \ b\, g(t) = 0$$

6) <u>$a = 1, b = -4$</u>

6a)

$$x^2\, y'' + \ x\, y' - 4\ \ y = 0 \qquad (E)$$

$$z'' - 4\, z = 0 \qquad (E_c)$$

Solutions de (E_c) :

$$g(t) = c\, e^{2\, t} + d\, e^{-2\, t}\, , \qquad t \in \mathbb{R}, (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

Solutions de (E) sur I :

$$f(x) = c\, e^{2\, Ln(x)} + d\, e^{-2\, Ln(x)} = c\, x^2 + \frac{d}{x^2} \quad (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

Solutions de (E) sur J :

$$f(x) = c\, e^{2\, Ln(-x)} + d\, e^{-2\, Ln(-x)} = c\, x^2 + \frac{d}{x^2} \quad (c, d) \in \mathbb{R}^2$$

6b) Soit f une solution de classe C^2 sur $\mathbb{R}$. Alors :

$$(c_1, d_1, c_2, d_2) \in \mathbb{R}^4 : \ \forall x \in I : f(x) = c_1 x^2 + \frac{d_1}{x^2}, \qquad \forall x \in J : f(x) = c_2 x^2 + \frac{d_2}{x^2}$$

f admettant une limite à droite et une limite à gauche en 0, on a :

$$d_1 = d_2 = 0$$

f'' admettant une limite à droite et une limite à gauche égales en 0, on a :

$$c_1 = c_2$$

D'où :

$$\forall x \in \mathbb{R} : f(x) = c_1 x^2$$

Réciproquement, on vérifie qu'une telle fonction est bien solution sur $\mathbb{R}$:

$$x^2 f''(x) + x f'(x) - 4 f(x) = 2 c_1 x^2 + x (2 c_1 x) - 4 c_1 x^2 = 0$$