

Exercice 2

On considère la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt$$

1a) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

1b) Montrer que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et trouver sa limite.

2) On définit la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n \cos t dt$$

2a) Calculer $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en fonction de n , et préciser le signe de $a_n - b_n$.

2b) Déterminer la nature de la série de terme général a_n .

3) On définit la série entière de terme général u_n définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n x^n$$

et on note U sa fonction somme, définie sur l'intervalle D :

$$\forall x \in D, U(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

3a) Déterminer la valeur du rayon de convergence, noté R , de la série entière précédente.

3b) Montrer que l'ensemble de définition D de la fonction U est : $D = [-R, R[$.

4a) Déterminer une expression de la fonction somme U sur l'intervalle $] -R, R[$.

4b) Justifier la continuité de la fonction U sur l'intervalle de définition D , et préciser la valeur de $U(-R)$.

Exercice 2 :

1a)

$$a_{n+1} - a_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1}(t) - \sin^n(t)) dt$$

Posons :

$$f(t) = \sin^{n+1}(t) - \sin^n(t) = \sin^n(t) (\sin(t) - 1)$$

f est une fonction continue, négative ou nulle et non identiquement nulle sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{n+1}(t) - \sin^n(t)) dt < 0$$

La suite (a_n) est donc strictement décroissante.

1b) Pour les raisons analogues au 1a) on a : $a_n > 0$.

La suite (a_n) est donc minorée par 0, on en déduit qu'elle est convergente vers une limite $L \geq 0$.

Calcul de la limite :

Soit $b \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ on a :

$$a_n = \int_0^b \sin^n(t) dt + \int_b^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt \leq \int_0^b \sin^n(b) dt + \int_b^{\frac{\pi}{2}} 1 dt$$

Donc :

$$a_n \leq b \sin^n(b) + \left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

Or à b fixé :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b \sin^n(b) = 0$$

Et par passage à la limite :

$$L \leq \left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

En faisant alors tendre b vers $\frac{\pi}{2}$ on obtient :

$$L \leq 0$$

D'où :

$$L = 0$$

2a)

$$b_n = \left[\frac{\sin^{n+1}(t)}{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{n+1}$$

$$a_n - b_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) (1 - \cos(t)) dt \geq 0$$

2b)

$$\frac{1}{n+1} \leq a_n$$

Or, la série de terme général $\frac{1}{n+1} \sim \frac{1}{n}$ tend vers $+\infty$ donc par comparaison la série de terme général a_n tend vers $+\infty$

3a) Notons R le rayon de convergence de $\sum a_n$

La série de terme général $a_n 1^n$ diverge donc $R \leq 1$

Soit alors $r \in [0,1[$ alors :

$$0 \leq a_n r^n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (r \sin(t))^n dt \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^n dt = \frac{\pi}{2} r^n$$

La série de terme général $\frac{\pi}{2} r^n$ converge donc la série de terme général $a_n r^n$ converge et $R \geq 1$
d'où : $R = 1$

3b) La suite (a_n) tend vers 0 en décroissant. La série de terme général $a_n (-1)^n$ est donc une série alternée. Elle est donc convergente. Donc :

$$D = [-1,1[$$

4a) Soit $x \in]-1,1[$ Considérons la suite de fonctions sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ définie par :

$$f_N(t) = \sum_{n=0}^N (x \sin(t))^n$$

Cette suite converge simplement sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ vers la fonction :

$$f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (x \sin(t))^n$$

Montrons que cette convergence est uniforme.

On a :

$$\left| (x \sin(t))^n \right| \leq |x|^n$$

Donc :

$$|f(t) - f_N(t)| = \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (x \sin(t))^n \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x \sin(t)|^n \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x|^n$$

Or $|x| < 1$ donc la série de terme général $|x|^n$ converge donc son reste de rang N tend vers 0.

Donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x|^n = 0$$

La suite de fonctions $(f_N(t))$ est donc uniformément convergente sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ est ainsi :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_N(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t) dt$$

Donc :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^N (x \sin(t))^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (x \sin(t))^n dt$$

Or :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^N (x \sin(t))^n dt = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^N \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin(t))^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin(t))^n dt = U(x)$$

D'où :

$$U(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} (x \sin(t))^n dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1 - x \sin(t)} dt$$

Faisons le changement de variable :

$$u = \tan\left(\frac{t}{2}\right), du = \frac{1}{2} \left(1 + \tan^2\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt = \frac{1}{2} (1 + u^2) dt$$

Avec le changement de bornes :

$$t = 0 \rightarrow u = 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} \rightarrow u = 1$$

$$\begin{aligned} U(x) &= \int_0^1 \frac{1}{1 - \frac{2xu}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du \\ &= 2 \int_0^1 \frac{1}{u^2 - 2xu + 1} du = 2 \int_0^1 \frac{1}{(u-x)^2 + 1-x^2} du \end{aligned}$$

Faisons le changement de variable :

$$u - x = y, du = dy$$

Avec le changement de bornes :

$$u = 0 \rightarrow y = -x$$

$$u = 1 \rightarrow y = 1 - x$$

$$\begin{aligned} U(x) &= 2 \int_{-x}^{1-x} \frac{1}{y^2 + (\sqrt{1-x^2})^2} dy \\ &= \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1-x}{\sqrt{1-x^2}}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right) \right) \end{aligned}$$

Or :

Sur $]0, +\infty[$:

$$\operatorname{Arctan}(t) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Sur $] -\infty, 0[$:

$$\operatorname{Arctan}(t) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{t}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

Donc :

$$U(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) - \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \right)$$

$$U(x) = \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{1-x}\right) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}\right) \right)$$

Et à droite en (-1) :

$$U(x) \sim \frac{-2}{\sqrt{1-x^2}} \left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{1} \right) \sim 1$$

Donc :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} U(x) = 1$$

4b) Etablissons la continuité à droite de U en (-1) :

Pour $x \in [-1, 0]$ la série de terme général $a_n x^n$ est alternée. Son reste de rang n peut alors être majoré en valeur absolue de la sorte :

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k x^k \right| \leq |a_{n+1} x^{n+1}| = a_{n+1} |x^{n+1}| \leq a_{n+1}$$

Où :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n+1} = 0$$

La série de fonction de terme général $a_n x^n$ qui est une fonction continue sur $[-1, 0]$ converge donc uniformément sur $[-1, 0]$ et sa limite uniforme $U(x)$ est donc continue sur $[-1, 0]$. Ainsi :

$$U(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} U(x) = 1$$