

Exercice 1

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1) Calculer les matrices A^2 et A^3 .

Vérifier que $A^3 = 2A - A^2$.

2) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de A et X un vecteur propre associé à λ .
Montrer que $\lambda^3 = 2\lambda - \lambda^2$.

3) Trouver les solutions de l'équation :

$$x^3 + x^2 - 2x = 0$$

Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de A ?

4) Déterminer $\ker(A)$, $\ker(A - I_3)$ et $\ker(A + 2I_3)$.

En déduire que chacune des racines de l'équation de la question 3 est une valeur propre de A et donner pour chaque valeur propre le sous-espace propre associé.

5) On définit la matrice :

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Montrer sans calcul que $P^{-1}AP = D$.

6) Soit k un réel fixé.

On définit l'ensemble :

$$C_k = \{M \in M_3(\mathbb{R}) \mid AM = kMA\}$$

6a) Montrer que C_k est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

6b) Soit $M \in M_3(\mathbb{R})$.

On lui associe la matrice $N = P^{-1}MP$.

Montrer que $AM = kMA$ si et seulement si $DN = kND$.

7) Pour $k \in \mathbb{R}$, on pose :

$$C'_k = \{N \in M_3(\mathbb{R}) \mid DN = kND\}$$

On admettra que C'_k est un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{R})$.

7a) Déterminer la forme des matrices de C'_0 , C'_1 , C'_{-2} , et C'_{-1} .

7b) Expliquer comment on trouverait une base de C_1 et une base de C_{-1} .

On ne demande pas d'explicitier les matrices obtenues.

Corrigé :

1)

$$A^2 = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -4 \\ 4 & 8 & -4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 9 & -17 & 8 \\ 8 & -16 & 8 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate :

$$A^3 = 2A - A^2$$

2) Soit λ une valeur propre de A alors :

$$\exists X \in \mathcal{M}_{31}(\mathbb{R}) \setminus \{0\} : AX = \lambda X$$

Donc :

$$A^2 X = AAX = A\lambda X = \lambda AX = \lambda^2 X$$

$$A^3 X = \lambda^3 X$$

Or :

$$A^3 X = 2AX - A^2 X$$

Donc :

$$\lambda^3 X = 2 \lambda X - \lambda^2 X$$

Soit :

$$(\lambda^3 + \lambda^2 - 2 \lambda) X = 0$$

Et comme $X \neq 0$:

$$\lambda^3 + \lambda^2 - 2 \lambda = 0$$

D'où la relation demandée.

3)

$$x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x(x^2 + x - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -2$$

L'ensemble des valeurs propres de A est donc inclus dans l'ensemble $\{-2, 0, 1\}$

4)

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A) \Leftrightarrow AX = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 5y + 2z = 0 \\ 2x - 4y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = y \end{cases}$$

Donc :

$$\text{Ker}(A) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A - I) \Leftrightarrow (A - I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5y + 2z = 0 \\ 2x - 5y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -z \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\text{Ker}(A - I) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right]$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \text{Ker}(A + 2I) \Leftrightarrow (A + 2I)X = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x - 5y + 2z = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0 \\ -x + y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

Donc :

$$\text{Ker}(A + 2I) = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

5) P est une matrice dont les colonnes forment une base de vecteurs propres de A . Ainsi, si on note P_1, P_2, P_3 les 3 colonnes de P , on a :

$$AP_1 = 0P_1, \quad AP_2 = 1P_2, \quad AP_3 = -2P_3$$

Et :

$$AP = PD$$

Soit, P étant inversible, car les sous espaces propres sont en somme directe :

$$P^{-1}AP = D$$

6a) Soit $(M, M', \alpha) \in C_k \times C_k \times \mathbb{R}$ alors :

$$AM = kMA, \quad AM' = kM'A$$

Donc :

$$AM + \alpha AM' = kMA + \alpha kM'A$$

Donc :

$$A(M + \alpha M') = k(M + \alpha M')A$$

D'où :

$$M + \alpha M' \in C_k$$

Donc C_k est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$

6b)

$$AM = kMA \Leftrightarrow P A P^{-1} P M P^{-1} = P k M P^{-1} P A P^{-1}$$

$$\Leftrightarrow D N = k N D$$

7a)

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ -2g & -2h & -2i \end{pmatrix} = k \begin{pmatrix} 0 & b & -2c \\ 0 & e & -2f \\ 0 & h & -2i \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = kb \\ 0 = -2kc \\ d = 0 \\ e = ke \\ f = -2kf \\ -2g = 0 \\ -2h = kh \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 0 \\ 0 = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ k = 1 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ h = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 0 \\ c = 0 \\ d = 0 \\ e = 0 \\ f = 0 \\ g = 0 \\ k = -2 \\ h = 0 \end{cases}$$

Ainsi, en notant E_{ij} la matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui à l'intersection de la i ème ligne et de la j ème colonne qui vaut 1 :

$$C'_0 = Vect[E_{11}, E_{22}, E_{33}, E_{12}, E_{13}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, b, c, i) \in \mathbb{R}^4 \right\}, \dim(C'_0) = 4$$

$$C'_1 = Vect[E_{11}, E_{22}, E_{33}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, e, i) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \dim(C'_1) = 3$$

$$C'_{-2} = Vect[E_{11}, E_{33}, E_{32}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & i \end{pmatrix} \mid (a, h, i) \in \mathbb{R}^3 \right\}, \dim(C'_{-2}) = 3$$

$$C'_{-1} = Vect[E_{11}, E_{33}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{pmatrix} \mid (a, i) \in \mathbb{R}^2 \right\}, \dim(C'_{-1}) = 2$$

7b) Notons que la famille $(E_{ij})_{(1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3)}$ est libre car c'est la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Montrons alors que la famille $(P E_{ij} P^{-1})_{(1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3)}$ est libre.

$$\sum_{(1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3)} x_{ij} P E_{ij} P^{-1} = 0 \Rightarrow P \left(\sum_{(1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3)} x_{ij} E_{ij} \right) P^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{(1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3)} x_{ij} E_{ij} = 0$$

$$\Rightarrow \forall (i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2 : x_{ij} = 0$$

Donc la famille est libre et donc toute sous partie de cette famille est libre. Or :

$$M \in C_0 \Leftrightarrow P^{-1} M P \in C'_0$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b, c, i) \in \mathbb{R}^4 \mid P^{-1} M P = a E_{11} + b E_{12} + c E_{13} + i E_{33}$$

$$\Leftrightarrow \exists (a, b, c, i) \in \mathbb{R}^4 \mid M = a P E_{11} P^{-1} + b P E_{12} P^{-1} + c P E_{13} P^{-1} + i P E_{33} P^{-1}$$

On en déduit :

$$C'_0 = Vect[P E_{11} P^{-1}, P E_{12} P^{-1}, E_{33}, P E_{13} P^{-1}, P E_{33} P^{-1}]$$

De même :

$$C'_1 = Vect[P E_{11}P^{-1}, P E_{22}P^{-1}, E_{33}, P E_{13}P^{-1}]$$

$$C'_{-2} = Vect[P E_{11}P^{-1}, E_{33}, P E_{32}P^{-1}]$$

$$C'_{-1} = Vect[P E_{11}P^{-1}, E_{33}, P E_{13}P^{-1}]$$