Exercice 4

On considère la suite (a_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \int_0^4 [t(4-t)]^n \, dt$$

1) Calculer a_0, a_1, a_2.

2) Montrer que a_n tend vers $+\infty$ quand l'entier n tend vers $+\infty$.

3) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leqslant 4^{n+1}$$

On considère alors la série entière de la variable réelle x définie par son terme général u_n ainsi :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, u_n(x) = a_n x^n$$

4) Déterminer le rayon de convergence de la série entière ainsi définie.

5) Déterminer l'ensemble D des réels x tels que la série $\sum a_n x^n$ soit convergente.

6) Déterminer la fonction somme f de cette série entière, en fonction des fonctions usuelles.

La fonction somme f est définie par :

$$\forall x \in D, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

Corrigé

1) On a :

$$a_0 = \int_0^4 1 \, dt = 4$$

$$a_1 = \int_0^4 t\,(4-t)\, dt = \int_0^4 (4\,t - t^2)\, dt = \left[2\,t^2 - \frac{t^3}{3}\right]_0^4 = 32 - \frac{64}{3} = \frac{32}{3}$$

$$a_2 = \int_0^4 \big(t\,(4-t)\big)^2\, dt = \int_0^4 (16\,t^2 - 8\,t^3 + t^4)\, dt = \left[\frac{16}{3}\,t^3 - 2\,t^4 + \frac{t^5}{5}\right]_0^4$$

$$= 4^3\left(\frac{16}{3} - 8 + \frac{16}{5}\right) = 4^3 \times 8\left(\frac{2}{3} - 1 + \frac{2}{5}\right) = \frac{4^3 \times 8}{15} = \frac{512}{15}$$

2) Posons :

$$f(t) = t\,(4-t)$$

f est positive ou nulle sur $[0,4]$ strictement croissante sur $[0,2]$ et strictement décroissante sur $[2,4]$ et $f(1) = f(3) = 3$ donc :

$$\forall\, t \in [1,3] : f(t) \geq 3$$

Donc :

$$\forall\, t \in [1,3] : f(t)^n \geq 3^n$$

Et :

$$a_n = \int_0^4 \big(t\,(4-t)\big)^n\, dt \geq \int_1^3 \big(t\,(4-t)\big)^n\, dt \geq \int_1^3 3^n\, dt = 3^{n+1}$$

Or :

$$\lim_{n \to +\infty} 3^{n+1} = +\infty$$

Par comparaison :

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = +\infty$$

3) Sur $[0,4]$: $0 \leq f(t) \leq f(2) = 4$ donc $f(t)^n \leq 4^n$ et :

$$a_n = \int_0^4 \big(t\,(4-t)\big)^n\, dt \leq \int_0^4 4^n\, dt = 4^{n+1}$$

4) Soit $0 < h < 2$. Sur $[2,2+h]$: $f(t) \geq f(2+h)$ et :

$$a_n = \int_0^4 \big(t\,(4-t)\big)^n\, dt \geq \int_2^{2+h} \big(f(2+h)\big)^n\, dt = \int_2^{2+h} \big((2+h)\,(2-h)\big)^n\, dt$$

Soit :

$$a_n \geq \int_2^{2+h} (4-h^2)^n\, dt = h\,(4-h^2)^n$$

Ainsi :

$$\boxed{h\,(4-h^2)^n \leq a_n \leq 4^{n+1}}$$

Or, d'une part, une série de terme générale $c\, q^n\, x^n$ avec $q > 0$ a pour rayon de convergence $\frac{1}{q}$ et d'autre part si deux suites U et V vérifient pour tout entier n : $U_n \leq V_n$ alors les rayons de convergence respectifs R_U et R_V des séries associées vérifient : $R_V \leq R_U$

On déduit donc de l'encadrement précédent, un encadrement du rayon de convergence R de la série de terme général a_n :

$$\boxed{\frac{1}{4} \leq R \leq \frac{1}{4-h^2}}$$

En faisant tendre h vers 0 on obtient :

$$\boxed{R = \frac{1}{4}}$$

5) Etudions la convergence pour $= \frac{1}{4}$.

<u>Première méthode</u> : en minorant le terme général

On a :

$$a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n = \int_0^4 \left(\frac{t\,(4-t)}{4}\right)^n \, dt$$

Reprenons pour $0 < h < 2$ la minoration obtenue précédemment :

$$a_n \geq h\,(4-h^2)^n$$

On en déduit :

$$a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n \geq= h\,\left(1 - \frac{h^2}{4}\right)^n$$

Donc pour tout entier naturel N :

$$\sum_{n=0}^{N} a_n \left(\frac{1}{4}\right)^n \geq \sum_{n=0}^{N} h\,\left(1-\frac{h^2}{4}\right)^n = h\,\frac{1-\left(1-\frac{h^2}{4}\right)^{N+1}}{1-\left(1-\frac{h^2}{4}\right)} = \frac{4}{h}\left(1-\left(1-\frac{h^2}{4}\right)^{N+1}\right)$$

Or la série qui est croissante converge soit vers une limite finie L soit vers $+\infty$. Supposons alors par l'absurde qu'elle converge vers L. On aurait , en faisant tendre N vers l'infini pour une valeur fixée de h :

$$L \geq \frac{4}{h}$$

En faisant maintenant tendre h vers 0 on obtient une absurdité.

Donc la série diverge.

<u>Deuxième méthode</u> : en utilisant les intégrales de Wallis

Mettons le polynôme du second degré sous forme canonique :

$$\frac{t\,(4-t)}{4} = t - \frac{1}{4}t^2 = 1 - \left(\frac{t}{2}-1\right)^2$$

Et faisons le changement de variable dans l'intégrale :

$$\frac{t}{2} - 1 = sin(x), \qquad \frac{dt}{2} = cos(x)\ dx$$

Il vient :

$$a_n\left(\frac{1}{4}\right)^n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(1 - sin^2(x)\right)^n\ 2\,cos(x)\,dx = 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(cos^2(x)\right)^n cos(x)\,dx$$

$$= 2\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(x)\right)^{2\,n+1} dx$$

D'où en raison de la parité de $cos(x)$

$$\boxed{a_n\left(\frac{1}{4}\right)^n = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(x)\right)^{2\,n+1} dx}$$

Nous reconnaissons une intégrale de Wallis et nous avons :

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \left(cos(x)\right)^{2\,n+1} dx \sim \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{n}}$$

Donc :

$$a_n\left(\frac{1}{4}\right)^n \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$$

Or la série de terme général $\frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{n}}$ diverge donc, la série de terme général $a_n\left(\frac{1}{4}\right)^n$ diverge.

Voyons maintenant la série de terme général $a_n\left(-\frac{1}{4}\right)^n$. Nous allons montrer que son terme général tend en valeur absolue vers 0 en décroissant car les termes de cette série sont alternés.

$$a_{n+1}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - a_n\left(\frac{1}{4}\right)^n = \int_0^4 \left(\left(\frac{f(t)}{4}\right)^{n+1} - \left(\frac{f(t)}{4}\right)^n\right)\ dt$$

$$= \int_0^4 \left(\frac{f(t)}{4}\right)^n \left(\frac{f(t)}{4} - 1\right)\ dt \leq 0$$

La suite $a_n\left(\frac{1}{4}\right)^n$ est donc décroissante et positive. De plus, l'équivalent précédent montre que son terme général tend vers 0. On peut en déduire que la série de terme général $a_n\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ converge.

Ainsi :

$$D=\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$$

6) Présentons là encore deux méthodes pour établir la somme sous forme d'une expression intégrale.

<u>Première méthode</u> : à partir des sommes partielles

On se place dans le cas non trivial $x\neq 0$. Posons pour $x\in D\backslash\{0\}$:

$$f_N(x)=\sum_{n=0}^{N}a_n\,x^n=\int_0^4\sum_{n=0}^{N}\big(x\,t\,(4-t)\big)^n\,dt$$

En notant que l'on a sur $[0,4]$:

$$x\,t\,(4-t)<1$$

On a :

$$f_N(x)=\int_0^4\frac{1-\big(x\,t\,(4-t)\big)^{N+1}}{1-x\,t\,(4-t)}\,dt$$

$$=\int_0^4\frac{1}{1-x\,t\,(4-t)}\,dt-\int_0^4\frac{\big(x\,t\,(4-t)\big)^{N+1}}{1-x\,t\,(4-t)}\,dt$$

Or :

$$\int_0^4\frac{\big(x\,t\,(4-t)\big)^{N+1}}{1-x\,t\,(4-t)}\,dt=x^{N+1}\int_0^4\frac{\big(t\,(4-t)\big)^{N+1}}{x\,t^2-4\,x\,t+1}\,dt$$

Et si $\in\left]0,\frac{1}{4}\right[$, $x\,t^2-4\,x\,t+1$ est un trinôme présentant un minimum en $t=\frac{4\,x}{2\,x}=2$ et ce minimum est égal à ::

$$x\times 2^2-4\,x\times 2+1=1-4\,x>0$$

Ainsi

$$0 \leq \int_0^4 \frac{\left(x\,t\,(4-t)\right)^{N+1}}{1-x\,t\,(4-t)}\,dt \leq \frac{x^{N+1}}{1-4\,x}\int_0^4 \left(t\,(4-t)\right)^{N+1}\,dt = \frac{x^{N+1}}{1-4\,x}\,a_{N+1}$$
$$\leq \frac{1}{1-4\,x}\left(\frac{1}{4}\right)^{N+1} a_{N+1}$$

Et si $\in \left]-\frac{1}{4},0\right[$, le tableau de variation du trinôme $g(t) = x\,t^2 - 4\,x\,t + 1$ présentant un maximum en 2 montre que : $\forall\, t \in [0,4] : g(t) = x\,t^2 - 4\,x\,t + 1 \geq g(0) = 1$

Ainsi :

$$0 \leq \left|\int_0^4 \frac{\left(x\,t\,(4-t)\right)^{N+1}}{1-x\,t\,(4-t)}\,dt\right| \leq \frac{|x|^{N+1}}{1}\int_0^4 \left(t\,(4-t)\right)^{N+1}\,dt = |x|^{N+1}\,a_{N+1} \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{N+1} a_{N+1}$$

Donc si $x \in \left[-\frac{1}{4},0\right[\cup \left]0,\frac{1}{4}\right[$:

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^4 \frac{\left(x\,t\,(4-t)\right)^{N+1}}{1-x\,t\,(4-t)}\,dt = 0$$

Ainsi :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n = \int_0^4 \frac{1}{1-x\,t\,(4-t)}\,dt$$

L'expression restant valable en 0.

<u>Deuxième méthode</u> : En utilisant la convergence normale

Pour $x \in \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$ posons : $f_n(t) = \left(x\,t\,(4-t)\right)^n$ et considérons la série de fonctions de terme général $f_n(t)$ qui converge simplement pour $t \in [0,4]$. Montrons que cette convergence est normale :

$$|f_n(t)| = |x\,t\,(4-t)|^n = |x|^n\,|t\,(4-t)|^n = |4\,x|^n\left|\frac{t\,(4-t)}{4}\right|^n \leq |4\,x|^n$$

Or : $|4\,x| < 1$ donc la série de terme général $|4\,x|^n$ converge et la série de terme général $f_n(t)$ converge normalement pour $t \in [0,4]$. Chaque $f_n(t)$ étant intégrable au sens de Riemann sur $[0,4]$, on peut donc intégrer la somme de la série terme à terme, soit :

$$\int_0^4 \sum_{n=0}^{+\infty}\left(x\,t\,(4-t)\right)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^4 \left(x\,t\,(4-t)\right)^n dt = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n\,x^n$$

on en déduit pour $x \in \left]-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right[$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \int_0^4 \frac{1}{1 - x\, t\,(4-t)}\, dt$$

Pour $x = -\frac{1}{4}$ on montre que l'expression reste valable par la méthode précédente

<u>Calcul de l'intégrale</u> : Mettons le dénominateur sous forme canonique :

$$\int_0^4 \frac{1}{1 - x\, t\,(4-t)}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^4 \frac{1}{t^2 - 4\,t + \frac{1}{x}}\, dt = \frac{1}{x}\int_0^4 \frac{1}{(t-2)^2 - 4 + \frac{1}{x}}\, dt$$

distinguons alors deux cas :

1er cas : $x \in \left]0, \frac{1}{4}\right[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \frac{1}{x}\int_0^4 \frac{1}{(t-2)^2 + \left(\sqrt{\frac{1-4\,x}{x}}\right)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x}{1-4\,x}}\left[tan^{-1}\left((t-2)\sqrt{\frac{x}{1-4\,x}}\right)\right]_0^4$$

Finalement :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \frac{2}{\sqrt{x\,(1-4\,x)}}\ tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{4\,x}{1-4\,x}}\right)}$$

2 ème cas : $x \in \left[-\frac{1}{4}, 0\right[$:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \frac{1}{x}\int_0^4 \frac{1}{(t-2)^2 - \left(\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}\right)^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2\,x}\left[Ln\left|\frac{t-2+\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}{t-2-\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}\right|\right]_0^4$$

$$= \frac{1}{2\,x}\left(Ln\left|\frac{2+\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}{2-\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}\right| - Ln\left|\frac{-2+\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}{-2-\sqrt{\frac{4\,x-1}{x}}}\right|\right)$$

Finalement :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\, x^n = \frac{1}{x}\, Ln \left| \frac{2 + \sqrt{\frac{4\,x - 1}{x}}}{2 - \sqrt{\frac{4\,x - 1}{x}}} \right|$$